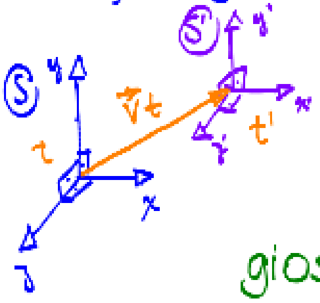
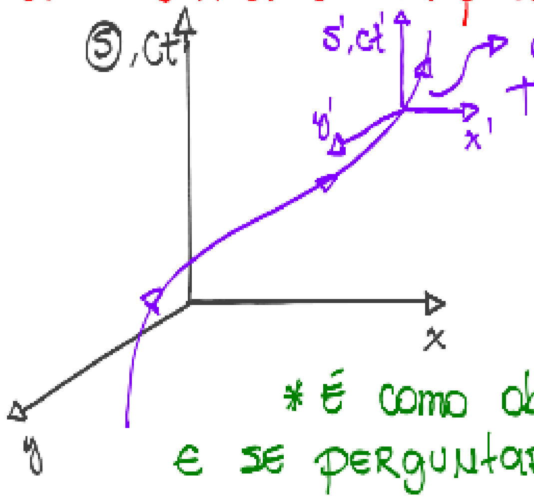
⇒ Diferença temporal entre referenciais inerciais



⇒ O referencial (S) marca passagens de tempo segundo seu "próprio" relógio, e o referencial (S') também possui o seu "próprio" marcador de tempo. Esses relógios próprios marcam o tempo próprio em cada referencial. Podemos considerar esses relógios em repouso na origem de cada sistema de coordenadas.

* Como conectar essa passagem de tempo entre referenciais inerciais?

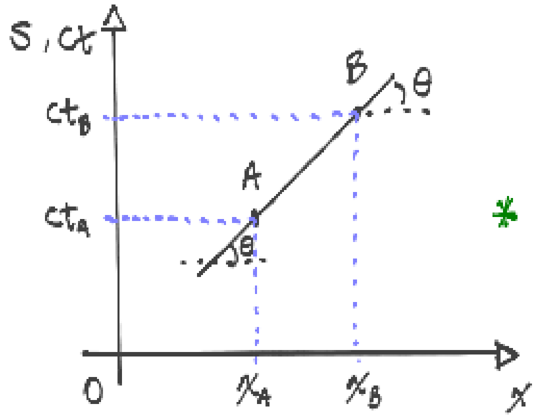


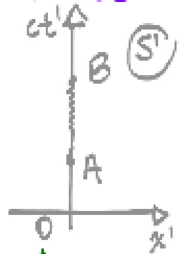
→ Linha mundo de uma partícula em movimento com certa velocidade $\vec{v}$ com relação à (S)

S ≡ Referencial parado (repouso)
S' ≡ " em movimento c/ veloc. $\vec{v}$

* É como observar uma borboleta voando no jardim e se perguntar qual o horário no relógio da borboleta.

⇒ Discutamos um exemplo unidimensional simples: Uma borboleta se afasta de mim com velocidade constante v p/ direita. Eu meço um intervalo de tempo Δt_{AB} quando a borboleta sai da posição x_A e chega à x_B. Para a Borboleta quanto é o mesmo intervalo entre os dois mesmos eventos $\Delta t'_{AB}$?





* No meu referencial o intervalo de tempo entre os dois eventos é $\Delta t_{AB} = t_B - t_A$.

* No referencial da borboleta ela está em repouso entre os mesmos 2 eventos.

* Mas sabemos que existe uma quantidade conservada/invariante entre ambos referenciais. $\Delta S^2 = \Delta S'^2$ então temos:

$$\left.\begin{aligned} \Delta S^2 &= -(c\Delta t_{AB})^2 + \Delta x_{AB}^2 \\ \Delta S'^2 &= -(c\Delta t'_{AB})^2 + 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} -(c\Delta t'_{AB})^2 &= -(c\Delta t_{AB})^2 + \Delta x_{AB}^2 \\ (c\Delta t'_{AB})^2 &= (c\Delta t_{AB})^2 - \Delta x_{AB}^2 \end{aligned} \;\rightarrow\; \Delta t'^2_{AB} = \Delta t_{AB}^2 - \frac{1}{c^2}\Delta x_{AB}^2$$

segue...

$$\Delta t'^2_{AB} = \Delta t^2_{AB}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{\Delta x^2_{AB}}{\Delta t^2_{AB}}\right) = \Delta t^2_{AB}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Assim:

$$\boxed{\Delta t'_{AB} = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta t_{AB}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\Delta t_{AB} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\Delta t'_{AB}}$$

↳ Conversão temporal entre as respectivas passagens de tempo. Veja que $\beta = \frac{v}{c} < 1$, portanto $\Delta t'_{AB} < \Delta t_{AB}$, Assim, para a Borboleta o intervalo de tempo é menor. Note também que é a borboleta a partícula em movimento. Se eu me reencontrar com a borboleta no futuro, ao compararmos nossos relógios, descobriremos que eu envelheci mais rápido que a Libe (Libe é o nome da Borboleta).

⇒ Formalmente podemos definir o tempo próprio (τ) e dilatação temporal como.

$\tau \equiv$ É o tempo medido pelo relógio da partícula (no seu próprio referencial) em que o relógio está em repouso.

$$d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2}, \quad \text{onde } ds^2 < 0 \text{ (dinâmicas internas ao cone de luz)}$$

↳ quantidade invariante no espaçotempo

$$ds^2 = -(c\,dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2+dy^2+dz^2) = dt^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right)$$

$$d\tau^2 = dt^2\left(1 - \frac{1}{c^2}[v_x^2 + v_y^2 + v_z^2]\right) = dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = dt^2(1-\beta^2)$$

Utilizemos o tempo próprio como parâmetro universal, um valor em que todos os referenciais possam concordar.

$$dt^2 = \frac{1}{(1-\beta^2)}d\tau^2 \leftrightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}d\tau \leftrightarrow \int_A^B dt = \int_A^B \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}d\tau$$

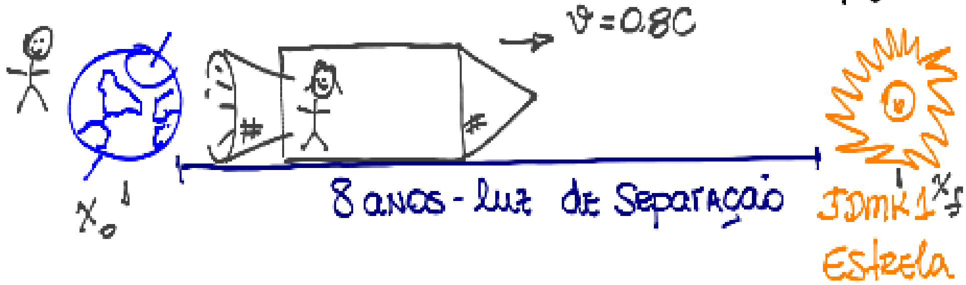
$$\boxed{dt = \gamma\, d\tau}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1 \quad \text{onde } \beta \leq 1$$

Há então uma "dilatação" dos intervalos de tempo p/ a partícula em repouso. E o relógio em movimento marca intervalos menores

"— *moving clocks run slow* —"

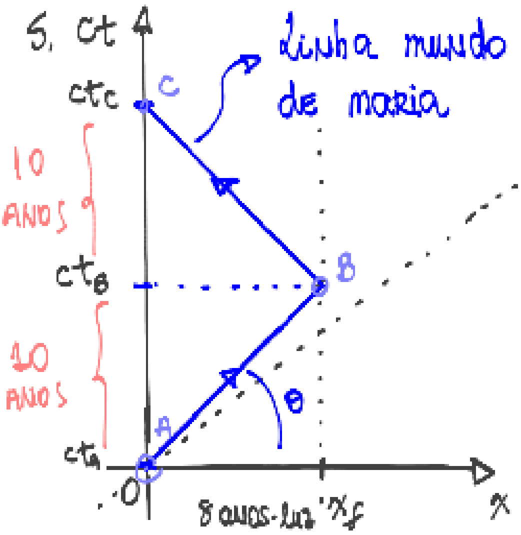
8.4.5 ↦ O famoso paradoxo dos Gêmeos (João e Maria)

João não gosta de viajar
Maria é exploradora



* Maria embarca numa aventura e vai explora a recém descoberta estrela JDMK1 longe da terra 8 anos-luz. João seu irmão gêmeo fica na terra e espera pacientemente a volta da irmã. O foguete da spacex que leva Maria acelera instântaneamente atinge a velocidade de 80% da luz vai e volta a terra sempre com acelerações instantâneas.
Ambos se despedem com os relógios sincronizados, no reencontro qual o tempo marcado em cada relógio?

⇨ Analisemos o diagrama do espaçotempo da viagem no referencial do João.



$tg\theta = \frac{c}{v} > 1$, $\theta > 45° (\pi/4)$

No referencial de João Maria demora t_B para chega à estrela, como volta c/ mesma velocidade de $v = 0{,}8c$, demora o mesmo tempo para retornar.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow t_B = \frac{\Delta x}{v} = \frac{8.c}{0{,}8c} \rightarrow \boxed{t_B = 10 \text{ anos}}$$

Portanto no relógio de João a viagem durou exatos 20 anos.

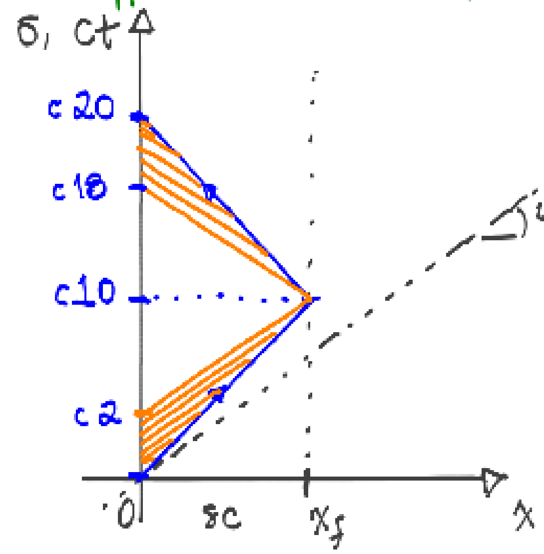
* Mas como já vimos o tempo próprio de maria flui numa taxa menor (proporcional à sua velocidade v)

$$d\tau = \sqrt{(1-\beta^2)}\, dt \leftrightarrow \Delta\tau = \sqrt{1-\beta^2}\, \Delta t \leftrightarrow \tau_{AB} = \sqrt{1-0{,}8^2}\, t_{AB} = 0.6\, t_B$$

Para maria essa viagem durou $\tau_{AB} = 6$ anos, na ida e na volta, de modo que ao compararem os relógios no reencontro, o de maria marca 12 anos o de joão 20 anos. João é 8 anos mais velho que sua irmã gêmea. Paradoxo: Para Maria é João que se move para esquerda com velocidade 0,8c, não seria ela a marcar um maior tempo em seu relógio?

Será haver então um paradoxo? Vamos pensar o problema com um pouco mais de calma. Vimos que a dilatação temporal diz que o tempo passa mais lentamente para o corpo em movimento.

Façamos com que João e Maria estejam em contínuo contato via WhatsApp (sinal viaja sempre à velocidade da luz - c)



* Tanto Maria como João podem ver continuamente ambos os relógios.

* Quando Maria chega na estrela seu relógio marca 6 anos, e ela recebe a foto do relógio de João marcando 2 anos. Então para ela o tempo de João passa mais lentamente como esperado!.

* João por sua vez recebe a msg da chegada de Maria 18 anos depois da partida e a foto do relógio dela marca 6 anos. Então para ele o tempo de Maria passa mais lentamente como esperado. Agora algo bizarro ocorre na comparação entre os relógios na viagem de volta de Maria, onde o relógio de João parece acelerar indo de 2 a 20 anos no reencontro e para João o relógio de Maria vai de 6 a 12 anos e ela volta em apenas 2 anos no referencial de João! (Boom!! Cabeça explodindo). Veja que semi resolvemos o problema, a compreensão completa do paradoxo envolve acelerações! Quem acelerou nessa viagem? João ou Maria? Isso é assunto de um curso mais avançado de Relatividade e será visto em Teoria Electromagnética II.

Não ficamos muito longe de compreender essa assimetria que nasce do formalismo relativístico; basta lembrar que em um movimento relativo alguém sofreu acelerações. A matemática porém já é de nosso conhecimento veja:

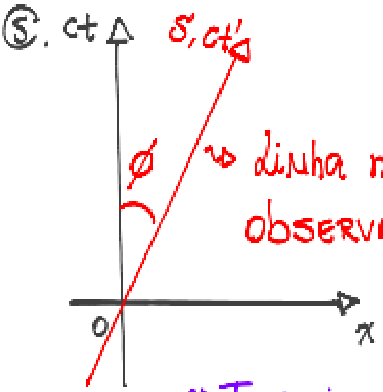
$$dt = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, d\tau \iff \Delta t = \int_{\tau_A}^{\tau_B} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, d\tau \,, \quad \text{com } \beta = \frac{v}{c}$$

Se o referencial é acelerado, como é o caso real do foguete de Maria então $v(t)$. Falta apenas saber encaixar a aceleração a nestas equações. Infelizmente para isso são necessários os quadrivetores x^μ.

8.5 ↦ Transformações de coordenadas entre referenciais inerciais.

↦ Para desenvolver melhor as idéias de dilatação temporal, contração espacial e equações de transformações entre coordenadas entendendo como um referencial inercial (S) vê outro (S').

⇒ Referenciais: (S') Observador em repouso (medidor)
(S') Observador em M.R.U para a direita.



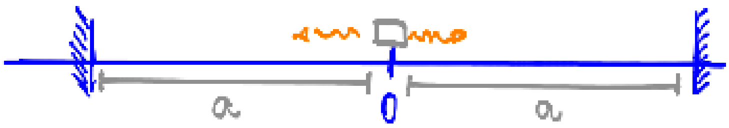
↦ linha mundo do observador parado em (S')

$$tg\phi = \frac{c\Delta t}{\Delta x} = \frac{c}{v}, \quad -\pi/4 < \phi \le \pi/4, \quad \boxed{v \le c}$$
$$-1 \le tg\phi \le 1$$

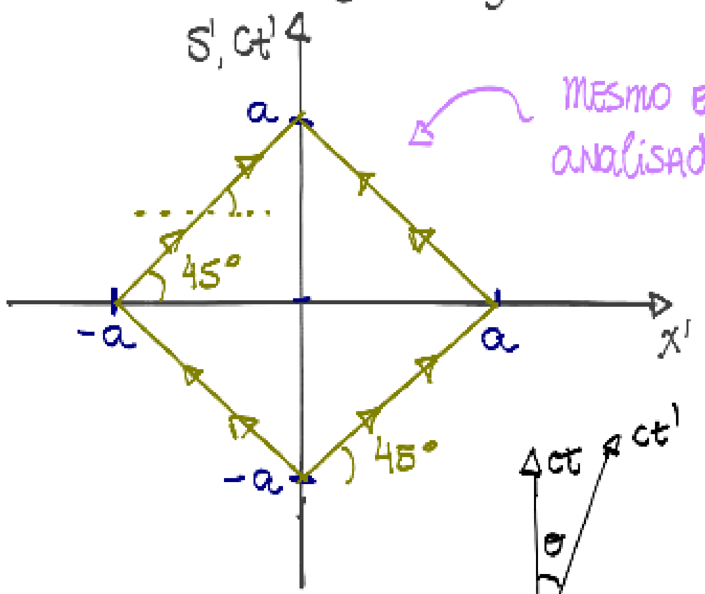
* Como o eixo x' é medido por S? Para isso vamos recorrer a um experimento mental - "Gedanken Experiment"

* Imagine que uma fonte de luz (laser) está em repouso no referencial S' e emite um fóton (frente e trás) que são refletidos por dois espelhos diametralmente opostos distantes $x' = \pm a$ da posição do laser. Após reflexão os fótons voltam a fonte em $x' = 0$. Analisemos este experimento sob o ponto de vista de ambos os referenciais.

Experimento Ref. (S')

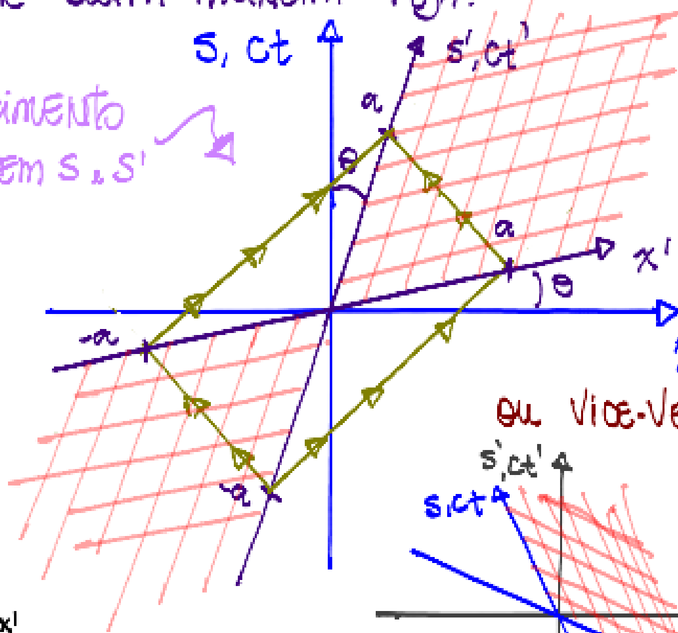


* Para (S') os eventos se passam da seguinte forma:

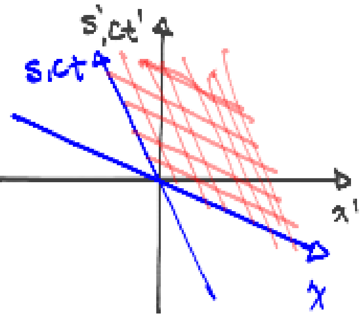


mesmo experimento analisados em S e S'

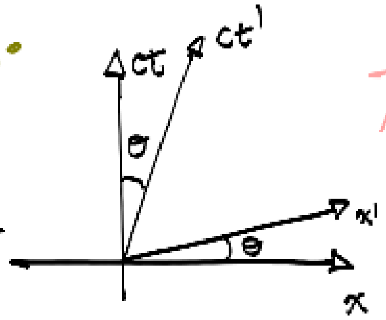
* Para (S) os eventos se passam de outra maneira veja.



ou vice-versa



Repouso
(S)



(S') → $\vec{v}$

$$\boxed{\theta = \arctg\left(\frac{c}{v}\right)}$$

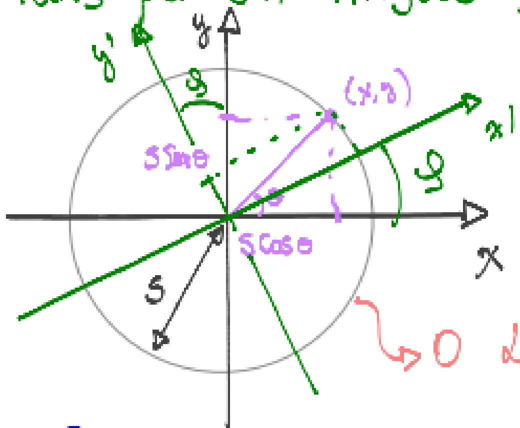
8.5 ↦ Calibração dos eixos entre referenciais e equações de transformação entre coordenadas

⇒ Vimos nos referenciais no espaço euclidiano uma quantidade que era conservada entre referenciais inerciais. No espaço euclidiano era conservado $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ ou infinitesimalmente:

$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 = ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$, note que o lugar geométrico invariante são circunferências e esferas de raio ds respectivamente. Veja que esses lugares geométrico podem ser caracterizados por um parâmetro θ veja: (exemplo em 2D)

$x = s\cos\theta \leftrightarrow dx = ds\cos\theta$, onde θ é um ângulo polar
$y = s\,\text{sen}\,\theta \leftrightarrow dy = ds\,\text{sen}\,\theta$ $\qquad \theta \in [0, 2\pi]$

* Neste caso fica fácil de ver que rotações do sistema de coordenadas por um ângulo φ não altera o raio ds (s).



$x = s\cos\theta$ $\quad \longleftrightarrow \quad$ $x' = s\cos(\varphi - \theta)$
$y = s\,\text{sen}\,\theta$ $\qquad\qquad\quad$ $y' = s\,\text{sen}(\varphi - \theta)$

$x^2 + y^2 = s^2 \longleftrightarrow x'^2 + y'^2 = s^2$

O lugar geométrico é preservado sob rotações

⇒ Porém, contudo e no entanto já verificamos que outra é a quantidade conservada entre referenciais no espaçotempo não euclidiano de Minkowski

$$ds^2 = -(c\,dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Numa dinâmica bidimensional como exemplo:

$$\Delta s^2 = -(ct)^2 + x^2$$

Representa o lugar geométrico no plano (ct, x) que possuem o mesmo intervalo Δs^2 com relação à origem do diagrama de Minkowski.

Note que também podemos parametrizar as coordenadas em função de um parâmetro θ, veja:

$\left.\begin{aligned} ct &= \Delta s\,\text{senh}\,\theta \\ x &= \Delta s\cosh\theta \end{aligned}\right\}$ Lembrando que $\cosh^2\theta - \text{senh}^2\theta = 1$ $\Big\}$ ou ainda $\text{senh}\,\theta = \dfrac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$

$\cosh\theta = \dfrac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$ //