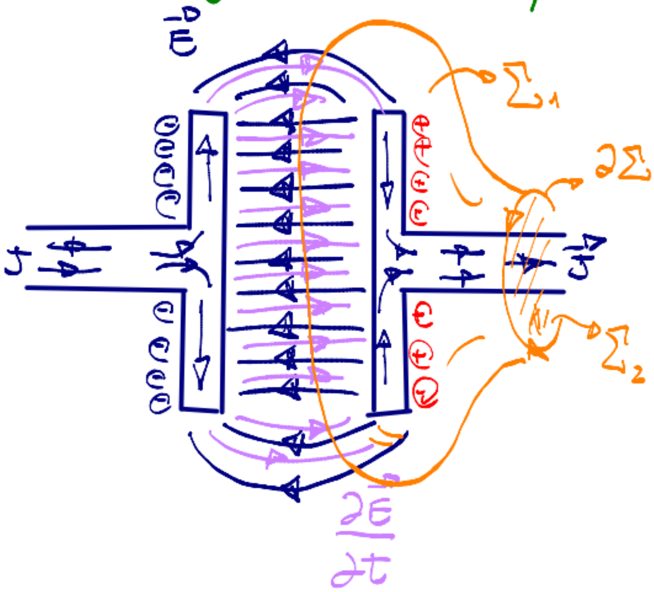
10,4 → Significado/Interpretação Física da Corrente de desloc. $\vec{J}_d$

⇒ Descarregamento do capacitor



$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\vec{J}_d$$

$$\int(\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{a} = \mu_0\int\vec{J}\cdot d\vec{a} + \mu_0\int\vec{J}_d\cdot d\vec{a}$$

$$\oint_{\partial\Sigma}\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \int_{\Sigma_1}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{a} = \int_{\Sigma_2}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{a}$$

$$\boxed{\oint_{\partial\Sigma}\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\int_{\Sigma_1,\Sigma_2}\vec{J}\cdot d\vec{a} + \mu_0\int_{\Sigma_1\text{ ou }\Sigma_2}\vec{J}_d\cdot d\vec{a}}$$

⇒ Se a integral é realizada em Σ_1 então $\vec{J}=\vec{0}$, se feita em Σ_2 então $\vec{J}_d=\vec{0}$. Note que a corrente de deslocamento I_d entre as placas possui o mesmo sentido de deslocamento da corrente I ao longo do fio condutor.

⇒ Ficamos assim com as equações de Maxwell com fontes

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ (Lei de Gauss)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (Dipolo magnético)

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (Lei de Indução de Faraday)

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (Lei de Ampére modificada)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (equação da continuidade)

$\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_d$ → densidade de corrente de deslocamento

10,5 → Equações de Maxwell no espaço livre (Vácuo, $\rho=0$, $\vec{J}=\vec{0}$)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial c\vec{B}}{\partial t}}$ Simetria $\vec{E}\to c\vec{B}$ e

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times c\vec{B} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$ $\quad \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\mapsto\vec{E}$, $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\mapsto\vec{E}$ //

10.6 Onda eletromagnética

No espaço livre ($\rho=0$, $\vec{J}=0$) as equações de Maxwell de indução são:

$$(1)\ \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad e \quad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}\ (2)$$

De (1) podemos obter:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Rotacional do rotacional de campo vetorial $\vec{F}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{F} = \epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{klm}\partial_l F^m = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l F^m$$

$$\epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l F^m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l F^m$$
$$\partial_i\partial_m F^m - \partial_l\partial_l F^i$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{F} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l F^m = \partial_i\partial_m F^m - \partial_l\partial_l F^i = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - \nabla^2\vec{F}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - \nabla^2\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{F}} \ //$$

Neste caso temos $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}(\cancelto{0}{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}) - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$, ficamos

$$-\nabla^2\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \rightsquigarrow \boxed{\nabla^2\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Exatamente a mesma relação pode encontrada para o campo magnético $\vec{B}$, onde ficamos com:

$$\boxed{\nabla^2\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}, \quad \left(\nabla^2 - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\{\vec{E},\vec{B}\} = \vec{0}$$

$$\Box \equiv \nabla^2 - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \boxed{\Box\vec{E} = \vec{0}} \quad e \quad \boxed{\Box\vec{B} = 0}$$

operador D'Lambertiano

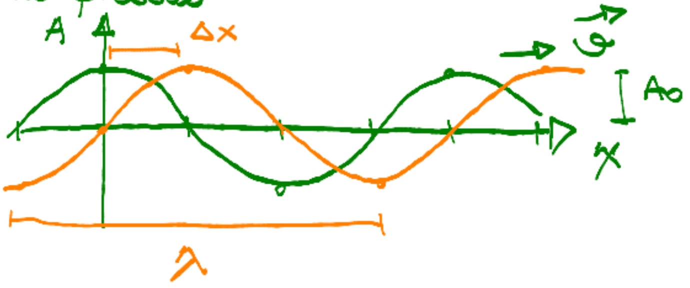
↳ Equação de propagação da onda.

(10.7) ↦ Solução da equação de onda $\square \vec{\Psi} = \vec{0}$,

↦ A onda que se propaga é um campo vetorial $\vec{\Psi}$, uma possível solução é a onda plana.

* Onda plana que se propaga p/ direita (direção x)

exemplo: Amplitude de uma onda de pressão:



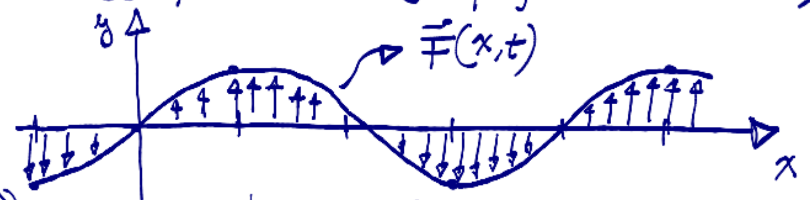
Função da Amplitude

$$F(x,t) = A_o \operatorname{Sen}(kx - kvt)$$

$$\boxed{F(x,t) = A_o \operatorname{Sen}(k(x - vt))}$$

O campo vetorial possui três componentes (espaço cartesiano)

$$\vec{F}(x,t) = \vec{A}_o \operatorname{Sen}(k(x - vt))$$



Se $\vec{A}_o = A_o \hat{j}$ ⟶ polarização do campo vetorial

↦ Polarização do campo na direção y

$$\vec{F}(x,t) = A_o \hat{j} \operatorname{Sen}(k(x - vt))$$

ou

$$\vec{F}(x,t) = A_o \hat{j} \operatorname{Cos}(k(x - vt))$$

$-\vec{v} \equiv$ movimenta p/ direita

$+\vec{v} \equiv$ " p/ esquerda

$\operatorname{Sen}\theta$ ou $\operatorname{Cos}\theta \equiv$ diferença de fase de $\frac{\pi}{2}$

$k = 2\pi/\lambda$ → número de onda (vetor de onda)

⇨ Podemos escrever a onda plana na forma vetorial complexa auxiliar

$$\boxed{\vec{F}^*(x,t) = \vec{A}_o e^{ik(x - vt)}},$$

$$\operatorname{Re}\{\vec{F}^*\} = \vec{A}_o \operatorname{Cos}(kx - kvt), \quad \operatorname{Im}\{\vec{F}^*\} = \vec{A}_o \operatorname{Sen}(kx - kvt),$$

$kv = \omega$ frequência angular

Assim, de maneira genérica, uma onda plana que se propaga numa direção qualquer $\hat{r}$ c/ velocidade $\vec{v}$

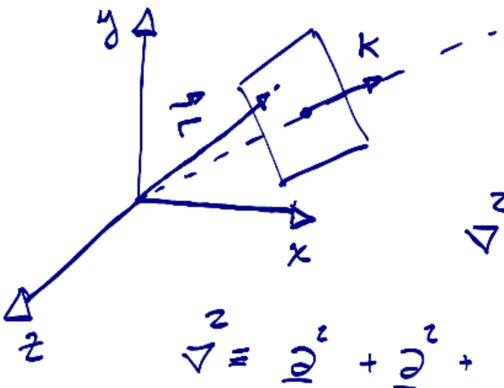
$$\boxed{\vec{F}(\vec{r},t) = \vec{A}_o e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}}$$

$\vec{k}\cdot\vec{r}$ = marca o plano de fase constante ou frente de onda que se propaga na direção $\hat{r}$ positiva.

Dessa forma, as ondas planas se propagando com velocidade $\vec{v}$ são soluções da equação de onda.

$$\vec{F}(x,t) = A_0 \hat{j}\, e^{i(kx-\omega t)} \quad , \omega = k v$$

pg 247



$$\square \vec{F} = \vec{0}$$

$$\square = \nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{F} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad \vec{F}(x,t) = F_y \hat{j}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad , \quad \nabla^2 \vec{F} = A_0 (ik)^2 e^{i(kx-\omega t)} \hat{j}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = A_0 + (ikv)^2 e^{i(kx-\omega t)} \hat{j}$$

$$\cancel{A_0} (ik)^2 \cancel{e^{i(kx-kvt)}} \cancel{\hat{j}} - \frac{1}{c^2} \cancel{A_0} (i\cancel{k})^2 v^2 \cancel{e^{i(kx-kvt)}} \cancel{\hat{j}} = 0 \longrightarrow v^2 = c^2$$

$$\boxed{v = \pm c} //$$

⇒ Não tem choro nem vela a velocidade de propagação da onda (campo vetorial) é obrigatóriamente $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}}$ //.

↦ Dessa forma podemos escrever os campos vetoriais gerais de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ como:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t)} \end{aligned}} //$$

Existe, contudo, uma relação fixa entre as polarizações do campo elétrico e magnético. (Relações conectadas pelas equações de Maxwell)

Exemplo: Se campo $\vec{E}_0 = E_0 \hat{j}$ (polarização na direção y), neste caso onde está a polarização de $\vec{B}_0$

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \hat{j}\, e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} E_0 \hat{j} (i\omega) = -\frac{E_0 (i\omega)}{c^2} \hat{j} \quad , \quad \vec{B}(x,t) = \vec{B}_0\, e^{i(kx-\omega t)}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_{ijk} \partial_j B^k$ ⇝ Só pode existir a componente $\hat{j}$, $i = 2$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \rightarrow \hat{j}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + \hat{i}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

Apenas a componente $\hat{j}\left(-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) \neq 0$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = -B_z^0\, i k\, e^{i(kx-\omega t)} = -\frac{E_0 (i\omega)}{c^2} e^{i(kx-\omega t)} = -\frac{E_0\, i k c}{c^2} e^{i(kx-\omega t)}$$

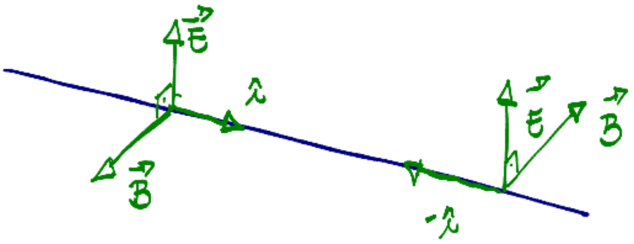
$$-B_z^0 = -\frac{E_0}{c}, \quad \boxed{B_z^0 = \frac{E_0}{c}} \quad \boxed{|E_0| = |cB_0|}$$

Apenas componente $\hat{z}$ de polarização se propagando p/ direita em x.

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \hat{j}\, e^{i(kx-\omega t)} \quad e \quad \vec{B}(x,t) = \frac{E_0}{c} \hat{z}\, e^{i(kx-\omega t)}$$

Isso p/ $\vec{c} = c\hat{\imath}$ se $\vec{c} = -c\hat{\imath}$ teríamos

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \hat{j}\, e^{i(kx+\omega t)} \quad e \quad \vec{B}(x,t) = -\frac{E_0}{c}\hat{z}\, e^{i(kx+\omega t)}$$



$$\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{|\vec{E}\times\vec{B}|} = \hat{n} \equiv \text{direção de propagação}$$

$$\boxed{\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{n} \text{ ou } \frac{2\pi}{\lambda}\hat{k}}$$

$(\vec{E}, \vec{B}, \hat{k})$ = tríade do campo eletromagnético

$$\vec{E}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \qquad \vec{E}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{E} = E_0\hat{j}\, e^{i(kx-\omega t)}, \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c}\hat{z}\, e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{E}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} \qquad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{E_0}{c}\hat{z}(-i\omega)\, e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\vec{E}\times\vec{B}(-i\omega) = -\vec{E}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} \qquad \boxed{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -i\omega\vec{B}}$$

⇒ Acredito que devo substituir (Completeza) $\{\hat{\imath},\hat{j},\hat{k}\} \mapsto \{\hat{x},\hat{y},\hat{z}\}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \cancel{E_x} & E_y & \cancel{E_z} \end{vmatrix} = \hat{j}(0) + \hat{\imath}\left(-\cancelto{0}{\frac{\partial E_y}{\partial z}}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = \frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = E_0 (ik)\, e^{i(kx-\omega t)}\hat{k} \longmapsto \vec{E}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = E_0^2 (ik)\, e^{2i(kx-\omega t)}\hat{\imath}$$

$$\vec{E}\times\vec{B}(-i\omega) = \vec{E}_0\times\vec{B}_0\, e^{2i(kx-\omega t)}(-i\omega) = -E_0^2 (ik)\, e^{2i(kx-\omega t)}\hat{\imath}$$

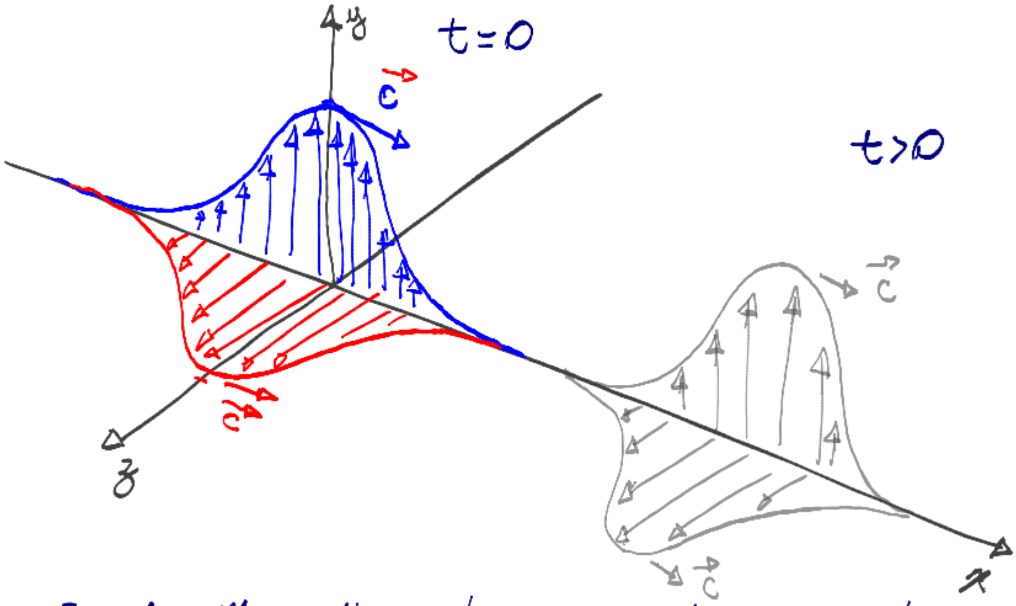
$$\vec{E}_0\times\vec{B}_0\,\omega = E_0^2 k\hat{\imath} \mapsto \vec{E}_0\times\vec{B}_0 = \frac{E_0^2 k}{\omega}\hat{\imath}, \quad \hat{\imath} \equiv \hat{k} \text{ direção de propagação.}$$

$$\boxed{\frac{\vec{E}_0\times\vec{B}_0}{\frac{E_0^2 k}{\omega}} = \hat{\imath}}$$

↳ ① De forma gera pode se mostrar $\boxed{\dfrac{\vec{E}_0\times\vec{B}_0}{|\vec{E}_0\times\vec{B}_0|} = \hat{k}}$

108 ↦ Construção de um pulso luminoso (pulso plano)

⇨ Pulso gaussiano se propagando no espaço



⇨ As equações de Maxwell mostram que tais construções são possíveis uma vez que são equações lineares, ou seja, qualquer solução pode ser construída pela superposição das soluções.

$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$, qualquer solução do tipo $\psi_n(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_n t)$ é solução, de forma que uma combinação tb é.

$$\psi(\vec{r},t) = \sum_n \psi_n(\vec{k}_n\cdot\vec{r} - \omega_n t) = \sum_n \psi_n(\vec{k}_n\cdot\vec{r} - 2\pi f_n t)$$

↳ expansão numa série de Fourier. O pulso gaussiano pode ser construído de tal forma.

Em nosso exemplo temos

$$\vec{E}(x,t) = E_0\hat{j}\, e^{-\frac{(x-ct)^2}{\sigma^2}}$$

$$\vec{B}(x,t) = B_0\hat{z}\, e^{-\frac{(x-ct)^2}{\sigma^2}}$$

$$\boxed{B_0 = \frac{E_0}{c}}$$

* Quanto mais comprimido espacialmente/temporalmente esse pulso de luz, mais componentes do espectro eletromagnético são necessárias para sua construção. Menor o pulso mais largo (Broad) é seu espectro. A mesma informação decorre do princípio de incerteza de Heisenberg onde uma compressão temporal Δt causa um alargamento ΔE $\left(\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}\right)$