exemplo: Consideremos a distribuição do exemplo anterior pg 25 como sendo uniforme, ou seja, ρ não depende de r e é uma constante para $r \leq R$. e nula para $r > R$

$$\rho \rightarrow \begin{cases} 0, & r \geq R \\ \rho = cte, & r \leq R \end{cases}$$

, Se a densidade de carga ρ é uniforme, e a carga total armazenada no volume da esfera é Q, podemos escrever:

$$\rho = \frac{Q}{\text{Volume}} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \rightarrow \boxed{\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}} \,, \quad \frac{4\pi}{3} R^3 \rho = Q \,, \quad \boxed{Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}$$

Assim, por simetria o campo é sempre radial $\boxed{\vec{E}(r) = E(r)\hat{r}}$
para $r \geq R$, temos pela lei de Gauss (carga Q na origem.)

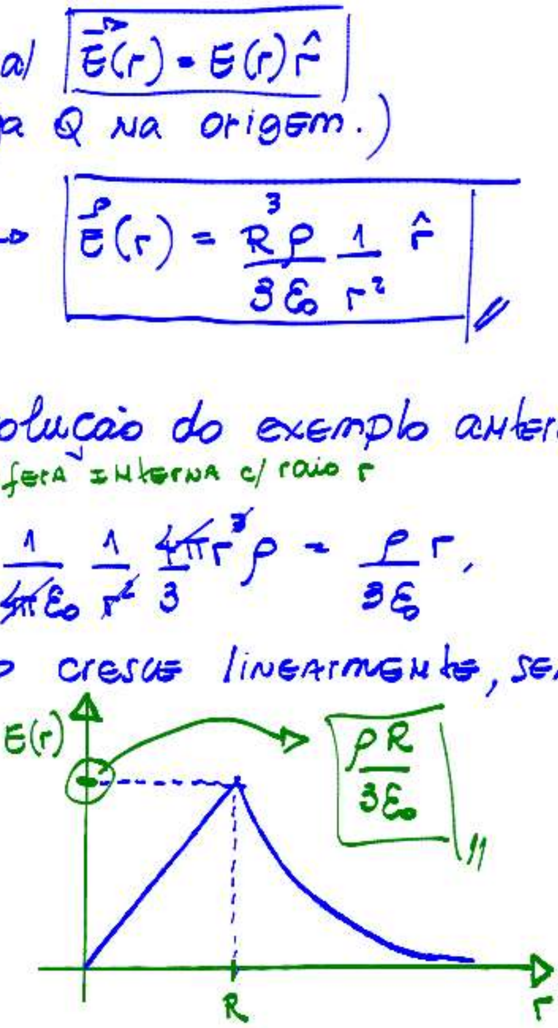
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{\cancel{4\pi}R^3\rho}{3\,\cancel{4\pi}\varepsilon_0 r^2} = \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \rightsquigarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}}$$

No interior da esfera é dado pela solução do exemplo anterior

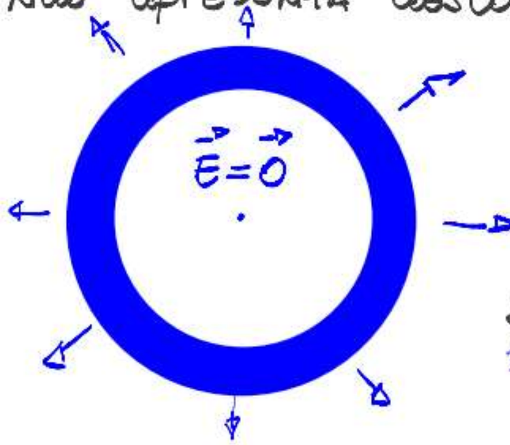
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\oint_{V'} \overset{cte}{\rho}\, dv = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\rho \underbrace{\oint_{V'} dv}_{\text{esfera interna c/ raio } r} = \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\frac{1}{\cancel{r^2}}\frac{\cancel{4\pi} r^{\cancel{3}}}{3}\rho = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r,$$

então para $r \leq R$ o módulo do campo cresce linearmente, sempre na direção radial.

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\,\hat{r}} \,, \quad \vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r\hat{r}, & r \leq R \\[2mm] \dfrac{R^3\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

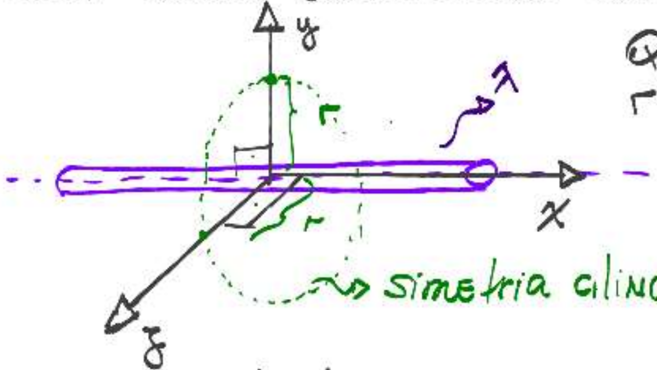


Note que a esfera uniformemente carregada ($\rho = cte$) cria um campo elétrico $\vec{E}$ contínuo no intervalo $0 \leq r \leq \infty$, ou seja, não apresenta descontinuidades (troca descontínua de valor/sinal).



Observamos também que não há campo elétrico no interior de uma casca esférica carregada. O mesmo é verdade para o campo gravitacional. (Para os "teóricos" da terra oca seria um problema manter os pés no "chão").

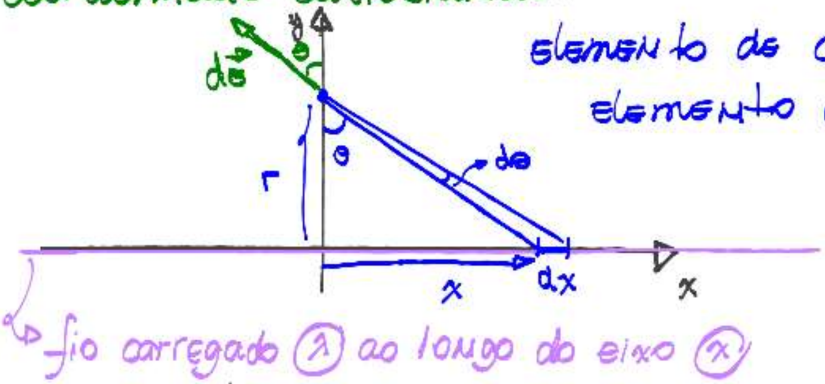
exemplo: Campo elétrico $\vec{E}$ criado por um fio carregado, com certa densidade linear de carga uniforme (λ). pg 26



Quanto vale este campo numa distância r do fio?

⇒ Resolvamos este problema por integração direta da lei de Coulomb, depois utilizaremos a lei de Gauss.

Lei de Coulomb (integração direta), trabalhemos no plano (x,y), em coordenadas cartesianas.



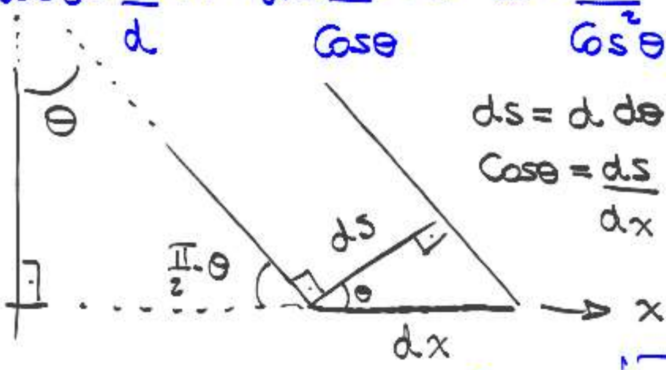
elemento de carga $dq = \lambda dx$ em x gera um elemento de campo $d\vec{E}$ em $y = r$.

Neste plano $(x\,y)$ o elemento de campo $d\vec{E} = \underbrace{dE\,\mathrm{sen}\theta\,(-\hat{x})}_{dE_x} + \underbrace{dE\cos\theta\,\hat{y}}_{dE_y}$,

→ A simetria mostra que os elementos dE_x irão sempre se anular mutuamente, restando apenas a integral nos elementos dE_y. Ou seja, há apenas campo elétrico na direção radial do fio.

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^2}dq\cos\theta \rightarrow \boxed{dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dx\cos\theta}{d^2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} d^2 = x^2 + r^2 \\ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \end{array} \right.$$

$$\cos\theta = \frac{r}{d} \rightarrow d = \frac{r}{\cos\theta} \rightarrow d^2 = \frac{r^2}{\cos^2\theta} \rightarrow dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dx\cos\theta^3}{r^2},$$



$$ds = d\,d\theta$$

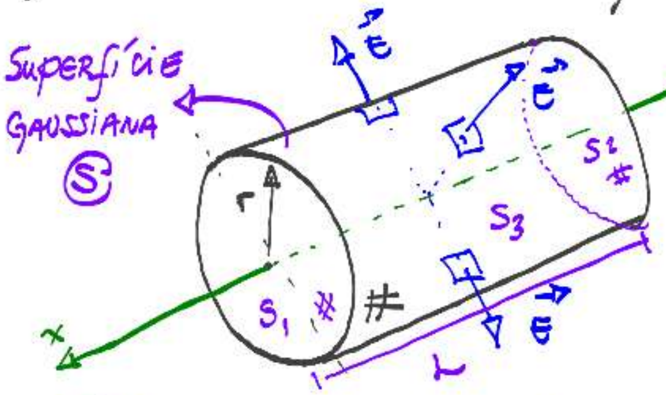
$$\cos\theta = \frac{ds}{dx} = \frac{d\,d\theta}{dx} \rightarrow \boxed{dx = \frac{d\,d\theta}{\cos\theta}} \rightarrow dx = \frac{r\,d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\frac{r\,d\theta}{\cos^2\theta}\cos^3\theta \rightarrow \boxed{dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\cos\theta\,d\theta}$$

$$E_y = E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta \rightarrow \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} + \mathrm{sen}\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(1+1) \rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\hat{r}}$$

Note que não há campo $\vec{E}$ paralelo ao fio, é sempre apontá na direção radial $\hat{r}$.

Analisemos o problema utilizando a lei de Gauss com ajuda da simetria do problema. pg27



→ fio carregado c/ (λ)

Por simetria $\vec{E}$ aponta na direção radial $\hat{r}$, e constante p/ $r = cte$,
$d\vec{a}$ = elemento de área da superfície cilíndrica de comprimento (L) e raio (r)

Pela Lei de Gauss temos: $$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0} = \frac{L\lambda}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r},\quad d\vec{a}_1 = da_1\,\hat{x},\quad d\vec{a}_2 = -da_2\,\hat{x},\quad d\vec{a}_3 = da_3\,\hat{r}$$

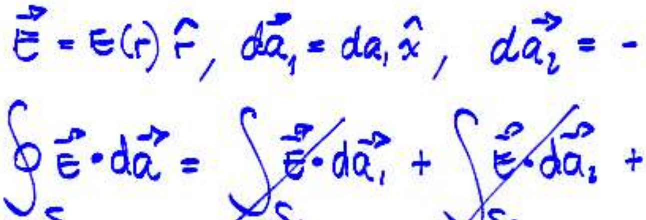
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \underbrace{\cancel{\int_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{a}_1}}_{0\ \perp} + \underbrace{\cancel{\int_{S_2}\vec{E}\cdot d\vec{a}_2}}_{0\ \perp} + \int_{S_3}\vec{E}\cdot d\vec{a}_3 = \int E\,da = E\int_{S_3} da$$

S_3 = lateral do cilindro

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = E\,2\pi r\,\cancel{L} = \frac{\cancel{L}\lambda}{\varepsilon_0} \rightsquigarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\hat{r}}$$

→ De acordo com a Lei de Coulomb.

1.13 → Campo elétrico criado por uma distribuição planar bidimensional de cargas

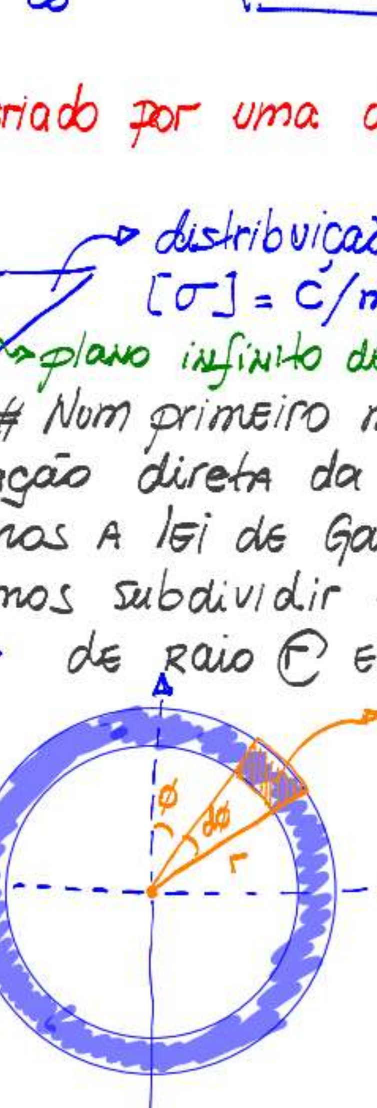


→ distribuição superficial de cargas σ
$[\sigma] = C/m^2$

→ plano infinito de cargas

Num primeiro momento resolveremos o problema pela integração direta da lei de Coulomb. Num segundo momento exploraremos a lei de Gauss e a simetria do sistema.

→ Vamos subdividir o plano e faixas circulares de raio (r) e largura dr.

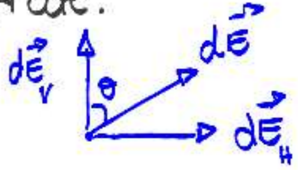


$\boxed{da = r\,d\phi\,dr}$

→ possui carga dq

$\boxed{dq = \sigma\,da = \sigma\,r\,d\phi\,dr}$

Cada elemento de carga cria em direções diametralmente opostas elementos dE_H de mesma intensidade e direções opostas. A única contribuição que sobrevive à integração é a direção vertical.



$\sim$ $\boxed{dE_v = dE\cos\theta}$, $dE_v = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R^2}\cos\theta = \dfrac{\sigma\, r\, d\phi\, dr \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ //

$$\frac{ds}{R} = d\theta \rightsquigarrow ds = R\,d\theta, \quad \cos\theta = \frac{ds}{dr} \rightsquigarrow dr = \frac{ds}{\cos\theta} = \frac{R\,d\theta}{\cos\theta}, \quad \boxed{dr = \frac{R\,d\theta}{\cos\theta}} \;//$$

$$dE_V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{R^2}} \cancel{R}\operatorname{sen}\theta \frac{\cancel{R}\, d\theta\, d\phi \cancel{\cos\theta}}{\cancel{\cos\theta}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{r}{R}$$

$$\boxed{r = R\operatorname{sen}\theta}$$

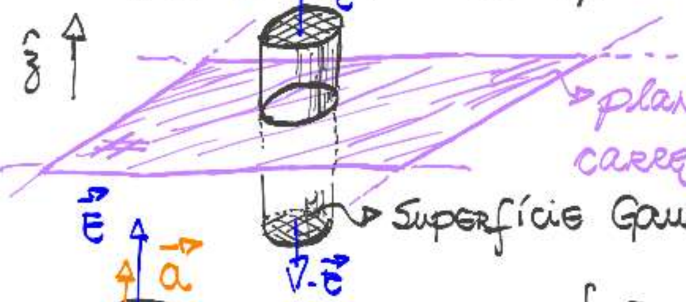
O campo elétrico total é obtido pela integração no plano todo $0 \le r \le \infty$, ou de forma equivalente $0 \le \phi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi/2$.

$$E_v \rightarrow E = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

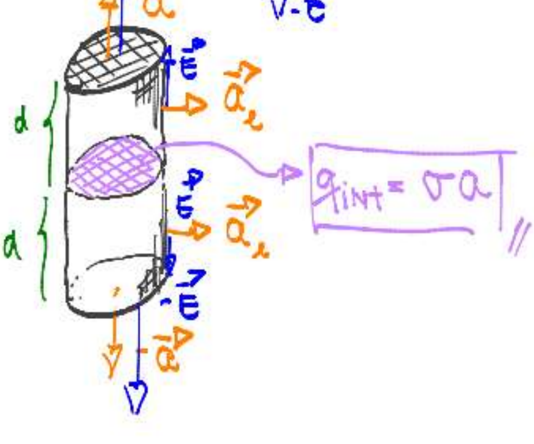
O campo possui apenas componente normal à superfície (plano) e não depende da distância (d) ao plano. Note que o mesmo campo existe no outro lado do plano, mas com direção oposta.

$|\vec{E}| = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = cte$

Utilizando a lei de Gauss $\rightsquigarrow$ $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = q_{in}/\varepsilon_0$



, Note que por simetria o campo $\vec{E}$ é normal à superfície, ou estar na direção $\hat{z}$,

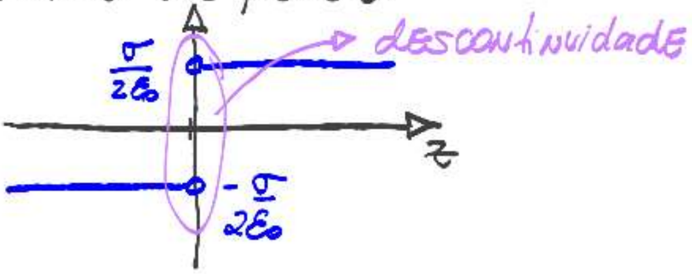


$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int_{up} \vec{E}\cdot d\vec{a} + \int_{dow} \vec{E}\cdot d\vec{a} + \int_{lateral} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q_{INT}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}\cdot\vec{a} + \vec{E}\cdot\vec{a} + \cancel{\vec{E}\cdot\vec{a}_\ell}^{\,0} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$$

$$2E\cancel{a} = \frac{\sigma \cancel{a}}{\varepsilon_0} \rightsquigarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \;// \rightsquigarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}} \;//$$

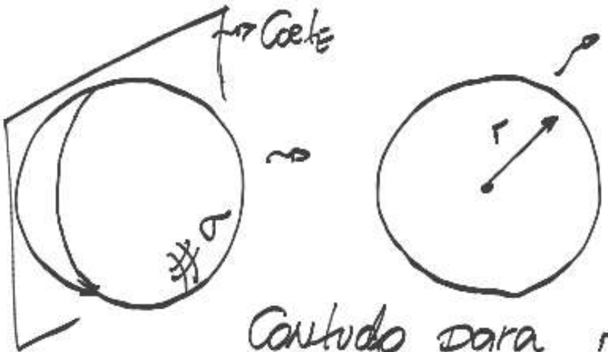
Um fato muito importante é notar que esse campo com boa aproximação é o campo de uma placa de um capacitor. Ocorre também uma descontinuidade na posição de cruzamento da placa.



Uma descontinuidade $\boxed{\Delta E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$ //

1,14 → Força sobre uma camada carregada.

Veja que se um plano bidimensional cria um campo de intensidade σ/ε_0 logo em sua superfície, deve existir uma força de repulsão $\vec{F}$ no sentido de quebrar/desmontar a distribuição. Vamos calcular a densidade de força sob uma casca esférica carregada c/ densidade σ.



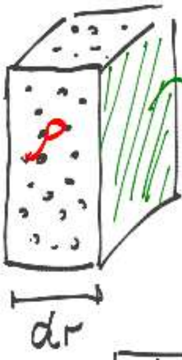
→ O campo elétrico externo à casca é

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}} \rightarrow \boxed{Q = 4\pi R^2 \sigma} //$$

→ p/ $r > R$

Contudo para $r < R$, $\boxed{\vec{E} = 0}$ //

Na realidade a melhor representação da casca esférica carregada é um volume c/ certa espessura dr onde pode existir uma certa densidade volumétrica de carga ρ.



$\rho dr = \sigma$ → densidade superficial

→ Área (A) = constante

O campo elétrico logo na posição exterior da casca esféria tem intensidade $\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$, descontinuidade

A descontinuidade na interface dr → $dE = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\rho dr}{\varepsilon_0}$

$\boxed{dE = \frac{\rho dr}{\varepsilon_0}}$, força elétrica $\boxed{\vec{F} = \vec{E} q}$

$$dF = E dq = E\rho\, dv = E\rho\, dr A \rightarrow \frac{dF}{A} = E\rho\, dr = \varepsilon_0 E \cancel{\rho} \frac{dE}{\cancel{\rho}} = E\, dE\, \varepsilon_0 \; //$$

$$\frac{dF}{A} = E\,dE\,\varepsilon_0 \rightarrow \frac{F}{A} = \varepsilon_0 \int E\,dE \,, \quad r_1 = r_0 \rightarrow E = E_1$$
$$r_2 = r_0 + dr \rightarrow E = E_2$$

$$\frac{F}{A} = \varepsilon_0 \int_{E_1}^{E_2} E\,dE = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2}\Big|_{E_1}^{E_2} = \frac{\varepsilon_0}{2}(E_2^2 - E_1^2)\,, \quad E_2 - E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

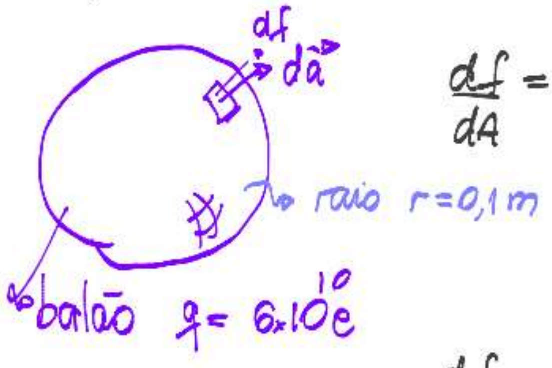
$\left[\frac{F}{A}\right] \equiv \frac{N}{m^2} \equiv$ densidade superficial de força elétrica, depende da média da descontinuidade do campo $\vec{E}$ ao cruzar a superfície.

$$E_2^2 - E_1^2 = (E_2 + E_1)(E_2 - E_1)$$

$$\frac{F}{A} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\Big|_{E_1}^{E_2}, \quad \vec{E}\cdot\vec{E} = E^2 \iff \underbrace{\vec{E}^{*}\cdot\vec{E}}_{\text{representação complex}} \rightarrow \boxed{\frac{F}{A} = \frac{(E_2 + E_1)\,\sigma}{2}}$$

$\Rightarrow$ No caso da casca esférica $E_1 = 0$, $E_2 = \sigma/\varepsilon_0$, $\boxed{\frac{F}{A} = \frac{df}{dA} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$

#Exemplo: Considere um balão carregado com 6.10^{10} elétrons ligados ao filme de borracha. Qual a densidade superficial de força que cada elemento de área está exposto?

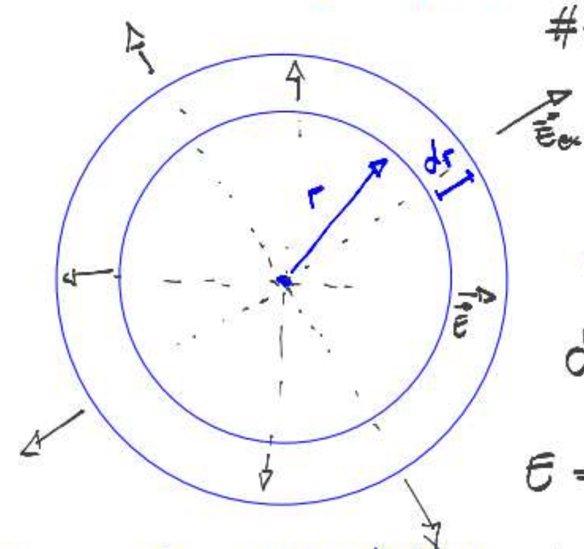


$$\frac{df}{dA} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\,, \quad \sigma = \frac{q}{\text{Área}} = \frac{6\times10^{10}\times1{,}602\times10^{-19}\,C}{4\pi\,(0{,}1\,m)^2}$$

$$\boxed{\sigma = 7{,}65\times10^{-8}\,C\,m^{-2}}$$

$$\frac{df}{dA} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{(7{,}65\times10^{-8})^2}{2\,(8{,}85\times10^{-12})} \cong 3{,}3\times10^{-4}\,N.m^{-2}$$

1,15 → Energia associada ao campo elétrico



casca esférica c/ densidade σ

#Qual a energia gasta para comprimir a carga em dr? Para isso faz-se um trabalho dW. No novo volume entre r e r+dr cria-se um novo campo elétrico $\vec{E} = \sigma/\varepsilon_0 \hat{r}$ que o preenche!

(Nessa compressão a variação do σ pode ser desprezada)

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F\,dr = \frac{df}{dA}.A.dr = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\,4\pi r^2\,dr$$

$$E = \sigma/\varepsilon_0 \rightarrow \sigma = E\varepsilon_0 \rightarrow \sigma^2 = E^2\varepsilon_0^2$$

$$dW = dU = \frac{E^2\varepsilon_0^2}{2\varepsilon_0}\,4\pi r^2\,dr \rightsquigarrow \boxed{dU = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\,4\pi r^2\,dr}$$

$$dU = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr \rightsquigarrow d\vartheta = 4\pi r^2 dr$$

↳ elemento de volume da esfera

$$[J] = \left[\frac{J}{m^3}\right][m^3] \rightsquigarrow \left[\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right] = \frac{J}{m^3}, \quad \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}\cdot\vec{E}}{2} = \mu_E$$

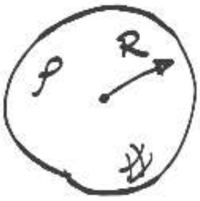
$$\mu_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$ ⇒ densidade volumétrica de energia elétrica associada ao campo elétrico

Então, a energia armazenada num certo volume Σ do espaço, onde há um campo elétrico não nulo presente é dado por:

$$\boxed{U_E = \oint_\Sigma \mu_E \, d\vartheta = \oint_\Sigma \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\vartheta} \rightarrow \frac{\varepsilon_0}{2}\oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{E}\, d\vartheta$$

Exemplo: Qual a energia associada ao campo elétrico de uma distribuição esférica contínua e uniforme ρ de raio R em todo espaço $0<r\leq\infty$.

→ já vimos que esse tipo de distribuição cria os respectivos campos $\vec{E}(\vec{r})$



$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}, \quad r>R, \qquad \vec{E}(r) = \frac{Q\, r}{4\pi R^3 \varepsilon_0}\hat{r}, \quad r<R.$$

Assim temos duas regiões com campos $\vec{E}$ distintos:

* Energia exterior à esfera $r>R$

$$U_E = \int_R^\infty \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr = \frac{\varepsilon_0 Q^2}{2(4\pi\varepsilon_0)^2} 4\pi \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

* Energia interior à esfera $0<r\leq R$

$$U_I = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \frac{Q^2 r^2}{(4\pi R^3 \varepsilon_0)^2} r^2 4\pi dr = \frac{\varepsilon_0 Q^2}{2\varepsilon_0^2 4\pi R^6}\int_0^R r^4 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^6}\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^R$$

$$U_I = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^6}\frac{R^5}{5} = \frac{1}{5}\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

A energia total é portanto:

$$U = U_I + U_E = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{1}{5}+1\right) \rightsquigarrow \boxed{U = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$