

2.5 → Potencial Elétrostático Φ criado por uma distribuição de cargas pg 38

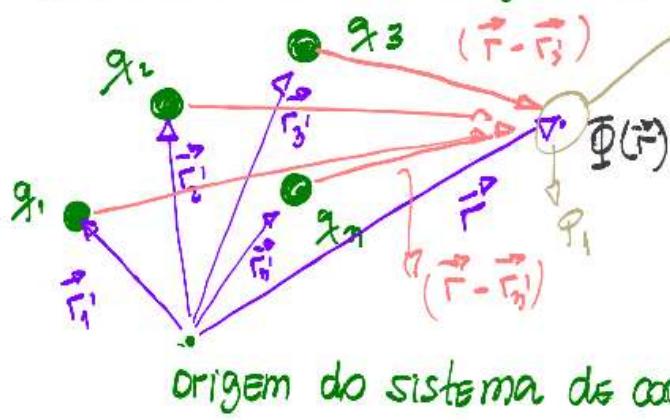
Note o valor do potencial Φ em qualquer ponto do espaço depende do valor desse potencial em algum ponto P_1 qualquer, a escolha de P_1 não altera o sistema físico, já que $\Phi(P_1)$ é uma constante qualquer. Lembre-se que o campo elétrico também não se modifica com a escolha de $\Phi(P_1)$, já que depende apenas de variações infinitesimais $\nabla\Phi$.

→ Campo escalar Φ de 1 única carga em que $\Phi(\infty) = 0$,

$$\Phi(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

r = distância do ponto à CARGA (fonte do potencial)

Pelo princípio da superposição uma distribuição discreta de cargas cria um potencial $\Phi(r)$ da forma:

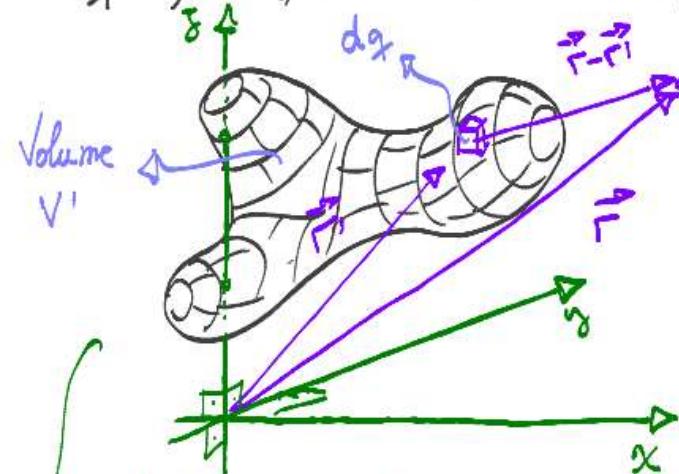


$$\Phi = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_j|}$$

\vec{r}_j = posição da carga fonte ①
 \vec{r} = posição espacial qualquer
 Vamos utilizar ① linha para indicar origem do sistema de coordenadas a posição das fontes.

Numa distribuição contínua de cargas ρ

$dq = \rho d\sigma$, elemento de carga.



→ Distribuição contínua de carga ρ

O potencial criado por dq é:

$$d\Phi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \rightarrow \Phi(r) = \int d\Phi$$

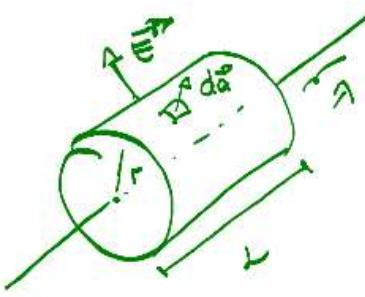
$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho d\sigma}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

, em coordenadas cartesianas temos:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{1/2}}$$

resolver numéricamente se necessário

#Exemplo: Vamos calcular o potencial elétrico de um fio unidimensional infinito carregado com densidade linear de carga λ . Aqui enfrentamos um problema, a carga se distribuir até ∞ , não podemos portanto assumir que $\Phi(\infty) = 0$, teremos que escolher um outro referencial para o potencial.



→ Esse tipo de distribuição gera um campo radial com simetria cilíndrica dado por:

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \quad \text{Como calculado usando Lei de Coulomb / Lei de Gauss}$$

Assim, a diferença de potencial entre pontos distantes r_1 e r_2 do fio é dado por:

$$\Phi_{21} = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r \Big|_{r_1}^{r_2}$$

$$\Phi_{21} = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_2) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_1)$$

→ podemos assumir que em r_1 o novo ref. e todos os potenciais dependem apenas de r_2 , ou seja, p/ q.g $r_2 \rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_1) = \text{cte}$

Para ref. em r_1 temos:

$$\Phi(r) = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + \text{cte}$$

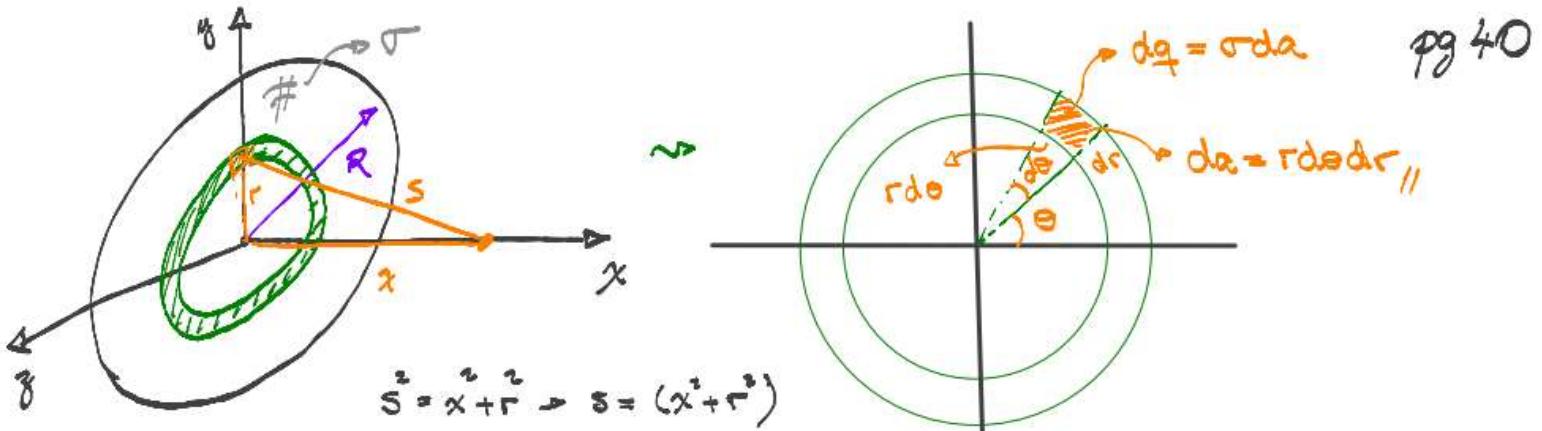
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

→ gradiente em coordenadas cilíndricas

→ VEJA que o campo elétrico não muda para q.g escolha de r_1 .

$$\vec{E} = -\nabla \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \hat{\theta} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{z} = + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

#Exemplo: Vamos calcular o potencial elétrico no eixo de simetria de um disco não condutor carregado c/ densidade superficial de carga σ , numa distância x , do disco. Consideremos que o disco tem raio R . Depois vamos fazer o limite de $x \rightarrow \infty$ e discutir o resultado. Por fim vamos calcular quanto vale o valor do potencial num ponto do disco distante r do centro.



$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma da}{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{r d\theta dr}{(x^2+r^2)^{1/2}} = \frac{\sigma 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2+x^2)^{1/2}}$$

$$r^2+x^2=u^2 \quad \cancel{z} r dr = z du$$

$$\int \frac{u du}{\sqrt{u^2}} = \int \frac{du}{u} = u = \sqrt{r^2+x^2} \Big|_0^R = \begin{cases} \sqrt{x^2+R^2}-x, & x>0 \\ \sqrt{x^2+R^2}+x, & x<0 \end{cases}$$

ficamos com Φ p/ $x>0$

$$\Phi(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2+R^2} - x)$$

$$\Phi(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2+R^2} + x)$$

Para $x=0$, no centro do disco

$$\boxed{\Phi(0) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}}$$

\Rightarrow * não esquecer que há unidades aqui.

Podemos calcular também o campo elétrico ao longo do eixo \hat{x} . $\vec{E} = -\nabla \Phi$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} - 1 \right) \hat{x} = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma x}{2\epsilon_0 \sqrt{x^2+R^2}} \right) \hat{x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \sqrt{x^2+R^2}} \hat{x}$$

Expansão em série de Taylor:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i}{i!}, \quad \text{se } x_0=0, \quad f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)x^i}{i!}$$

Expansão em Série MacLaurin

$$\frac{1}{(1+x)^{1/2}} = (1+x)^{-1/2} = f(x), \Rightarrow \text{expansão } x \rightarrow 0$$

$$f(x) = 1 + \left. -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+x)^{3/2}} \right|_{x=0} \cdot x + \dots$$

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \dots O(x^2), \dots$$

$$\vec{E}(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\hat{x}}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}}, \text{ para pontos muito longe do disco, } x \gg R, \frac{R^2}{x^2} \rightarrow 0$$

$$\vec{E}(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2}\right) \hat{x} = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{x^2}\right) \hat{x} + \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 x^2} \hat{x} = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 x^2} \hat{x}$$

$$\vec{E}(x) = \frac{\sigma \pi R^2}{4\pi \epsilon_0 x^2} \hat{x} \rightarrow Q = \sigma \pi R^2 \quad \rightarrow \boxed{\vec{E}(x) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 x^2} \hat{x}}$$

(Carga total no disco)

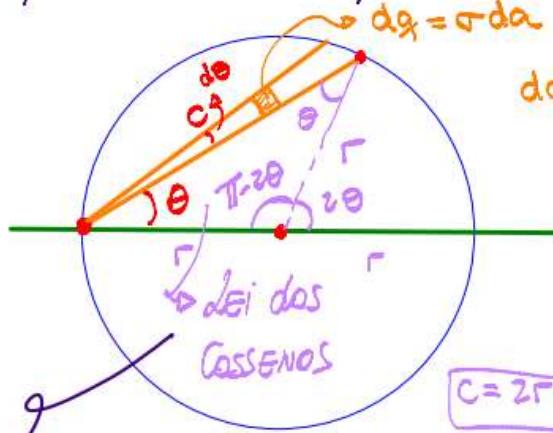
Note portanto, que quando observados de muito longe $x \gg R$, o disco parece ser uma carga pontual de carga Q . O mesmo deve ocorrer com o potencial $\Phi(x)$, veja.

$$\Phi(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + R^2} - x \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(x \sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}} - x \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} + \dots \right) - x \right)$$

$$\Phi(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(x - x + \frac{R^2}{2x^2} \right) = + \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 x} = + \frac{\sigma \pi R^2}{4\pi \epsilon_0 x} = + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 x},$$

que é o potencial criado por uma carga pontual Q , quando $x \rightarrow \Phi(\infty) = 0$, que é onde assumimos o ref. do potencial. Contudo, sabemos que p/ $x \gg R$ o campo apenas se parece como uma carga pontual em primeira ordem de aproximação, se considerarmos ordens mais altas teremos mais informação da estrutura da distribuição.

O campo elétrico $\vec{E}(x, y, z)$ e o potencial $\Phi(x, y, z)$ fora do eixo de simetria central não é tão trivial de se calcular analiticamente, já que as integrais podem não possuir solução analítica simples e a solução numérica sempre pode ser utilizada. Vamos então calcular o potencial num ponto r sob o disco.



$$\Phi = \frac{\sigma}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{d\alpha}{c} = \frac{\sigma}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\sigma c' d\phi d\alpha}{c}$$

$$\Phi = \frac{\sigma}{4\pi \epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_0^C d\alpha' = \frac{\sigma}{4\pi \epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} C d\phi = \frac{\sigma \pi}{2\pi \epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi$$

$$\boxed{\Phi(r) = \frac{\sigma r}{\pi \epsilon_0}},$$

$$\begin{aligned} C &= r^2 + R^2 - 2r^2 \cos(\pi - 2\theta) = 2r^2 - 2r^2 (\cos \pi \cos 2\theta + \sin \pi \sin 2\theta) = 2r^2 (1 + \cos 2\theta) = \\ &= 2r^2 (1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 4r^2 \cos^2 \theta \rightarrow \boxed{C = 2r \cos \theta} \end{aligned}$$

A ENERGIA NECESSÁRIA para construir um sistema discreto pg 42 de cargas é então:

$\Phi_{jk}(\vec{r}_{jk})$ = potencial criado por uma carga q_k , distante \vec{r}_{jk} da carga na posição \vec{r}_j .

A energia p/ adicionar uma carga q_j ao sistema é $q_j \Phi_{jk}$, para construir toda a distribuição temos:

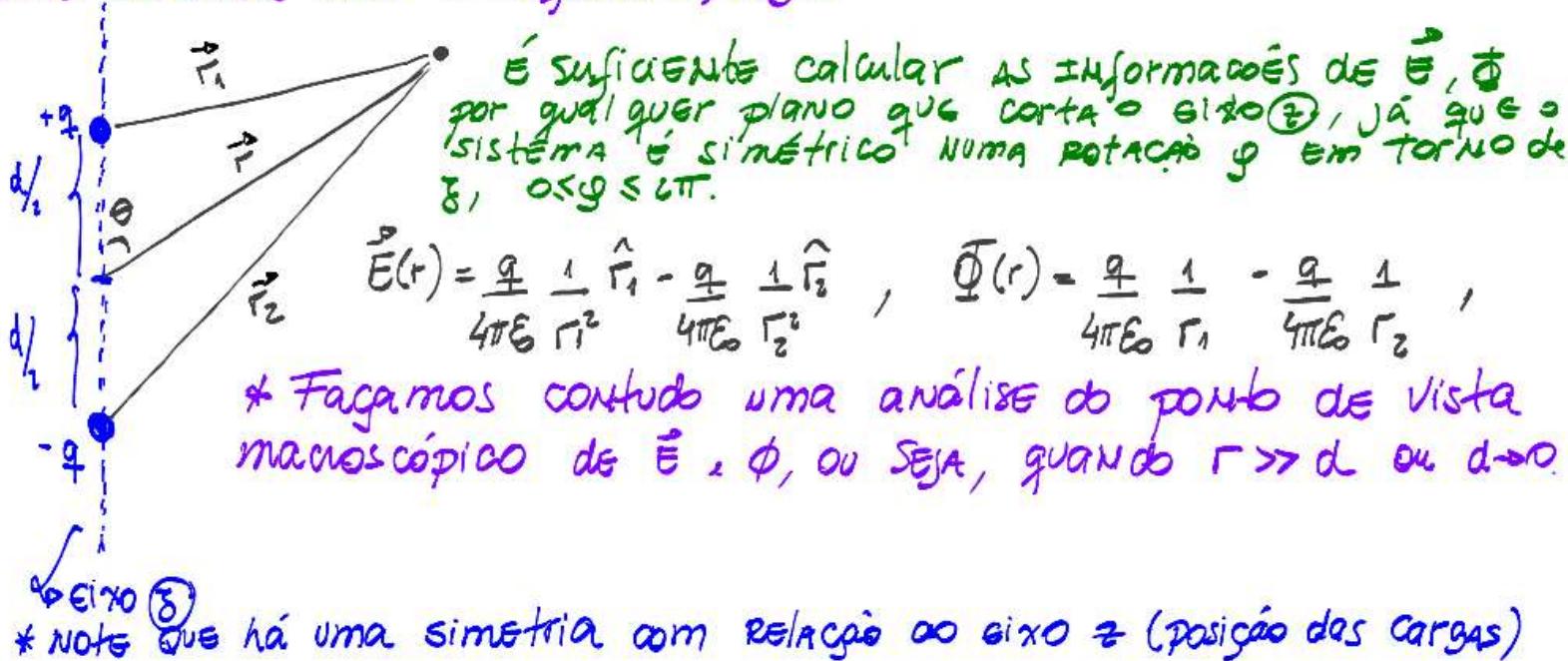
$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j \underbrace{\sum_{k \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{|\vec{r}_{jk}|}}_{\text{Cargas} \quad \text{potencial}}$$

Podemos generalizar para a energia de uma distribuição finita ρ como:

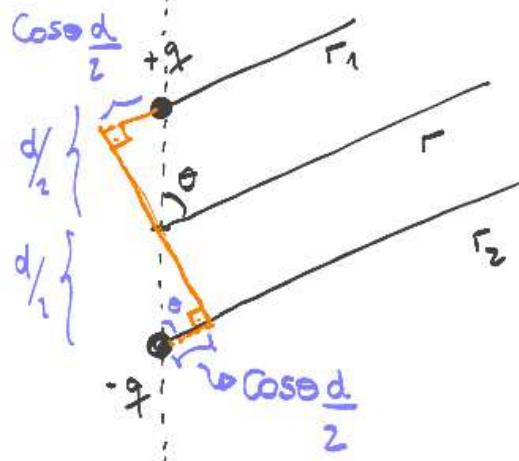
$$U = \frac{1}{2} \int \rho \Phi d\sigma, \text{ onde } \rho \text{ só existe na distribuição } V'$$

2.6 → Dipolos Elétricos

Considere um dipolo elétrico um sistema de duas cargas elétricas de sinais opostos separados por uma distância d . Esse conjunto formado por dois monopólos (fonte, sumidouro) é o nosso dipolo elétrico. Lembre-se que já somos capazes de calcular tanto o campo elétrico $\vec{E}(x,y,z)$ quanto o potencial $\Phi(x,y,z)$ de qualquer distribuição. Este sistema não é diferente, veja:



PARA UM PONTO MUITO DISTANTE DAS DIPOLOS, PODEMOS CONSIDERAR \vec{r}_1 , \vec{r}_2 E \vec{r} COMO PARALELOS, ASSIM O DIAGRAMA FICA. pg 43



Assim temos que r_1 e r_2 podem ser escritas:
 $r_1 = r - \frac{d}{2} \cos\theta$, $r_2 = r + \frac{d}{2} \cos\theta$

O Potencial é então reescrito como:

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r - \frac{d}{2} \cos\theta)} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r + \frac{d}{2} \cos\theta)}$$

ou ainda: $\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{1}{(1 - \frac{d}{2r} \cos\theta)} - \frac{1}{(1 + \frac{d}{2r} \cos\theta)} \right]$

Como $d \ll r$, $\frac{d}{2r} \rightarrow 0$

Lembrando que expansão de MacLaurin $\rightarrow (1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + \dots O(x^2)$

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{1 + \frac{d}{2r} \cos\theta} + O(\frac{d}{2r}) \right) - \frac{1}{1 + \frac{d}{2r} \cos\theta} + O(\frac{d}{2r})$$

Em primeira ordem temos que o potencial tem a forma:

$$\Phi(r) = \frac{qd \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \rightarrow \boxed{\Phi(r,\theta) = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

onde $p = q \cdot d$, chamado de momento de dipolo elétrico.
(módulo/intensidade)

VEJA QUE $\Phi(r,\theta) \propto 1/r^2$ E POSSUI DEPENDÊNCIA ANGULAR θ , NÃO ESQUEÇA QUE O POTENCIAL É SIMÉTRICO NUMA ROTAÇÃO φ EM TORNO DE z . Podemos observar que o sistema é melhor representado em coordenadas esféricas. Para calcular é preciso:

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}, \text{ Gradient em coordenadas esféricas.}$$

$$\vec{E}(r,\theta) = -\vec{\nabla}\Phi(r,\theta), \text{ independe de } \phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 0.$$

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{p + z \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{r} + \frac{p - z \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{\theta} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta})_{||}$$

NOTA QUE O CAMPO ELÉTRICO DE OUSSE C/ $1/r^3$, CAI MAIS RÁPIDO SE COMPARADO AO CAMPO CAUADO POR UMA CARGA PONTUAL.