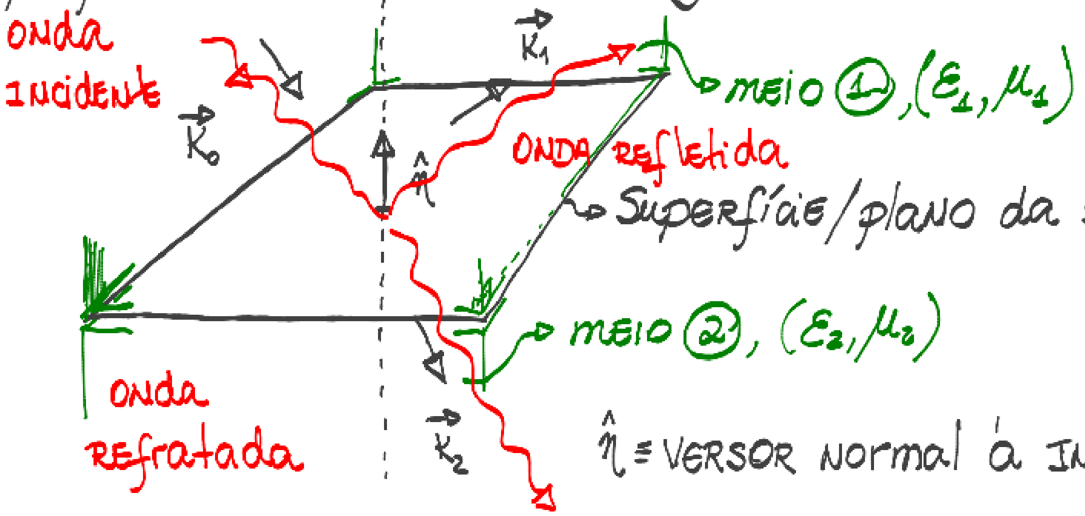
Capítulo (12) ↦ Leis da Óptica (Óptica Física)

(12,1) Reflexão e Refração da luz na interface entre meios dielétricos

Consideremos 2 meios dielétricos separados por um plano (fictício) infinito - superfície da interface. Os meios podem possuir propriedades elétricas e magnéticas distintas. (ε, μ)



$\hat{\eta}$ = versor normal à interface de separação

↦ Consideremos que esses materiais sejam neutros eletricamente (ausência de cargas elétricas livres) e isolantes, ou seja, com condutividade desprezível $\sigma \approx 0$, $\vec{J} = \sigma \vec{E} \mapsto \vec{J} \approx \vec{0}$.

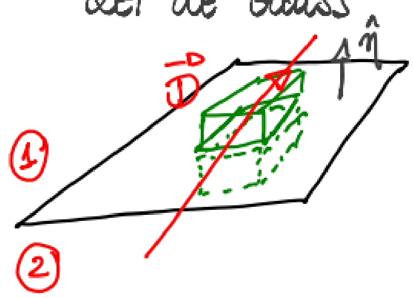
↦ O campo em que se propaga no interior dos dielétricos devem obedecer as equações de Maxwell para este meio, que em unidades Gaussianas e com ajuda das relações constitutivas podem ser escritas como:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \mapsto \vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \longmapsto \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

(12,2) Condições de contorno na interface

Lei de Gauss $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0$



$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{D}\cdot\hat{\eta}\, da = 0 \mapsto \int_{\partial\Sigma_1} \vec{D}_1\cdot d\vec{a} + \int_{\partial\Sigma_2} \vec{D}_2\cdot d\vec{a} + \cancel{\int_{\partial\Sigma_{\ell 1}} \vec{D}_1\cdot d\vec{a}}^{\,0} + \cancel{\int_{\partial\Sigma_{\ell 2}} \vec{D}_2\cdot d\vec{a}}^{\,0} = 0$$

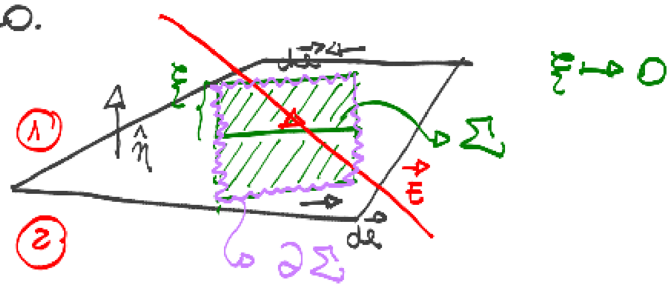
$$\int \vec{D}_1\cdot\hat{\eta}\, da - \int \vec{D}_2\cdot(\hat{\eta}\, da) = 0 \quad \boxed{(\vec{D}_1 - \vec{D}_2)\cdot\hat{\eta} = 0}$$

Ou equivalentemente $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\hat{\eta} = 0$

A mesma relação vale para o campo magnético $(\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\cdot\hat{\eta} = 0$.
Ou seja, as componentes normais ou ortogonais dos campos $\vec{D}$ e $\vec{B}$ são contínuas ao cruzar a interface entre os meios.

Lei de Faraday e Lei de Ampére

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$ $\mapsto$ escolhamos uma superfície Amperiana de integração.



$$\int_\Sigma (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{a} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \vec{B}\cdot d\vec{a}$$

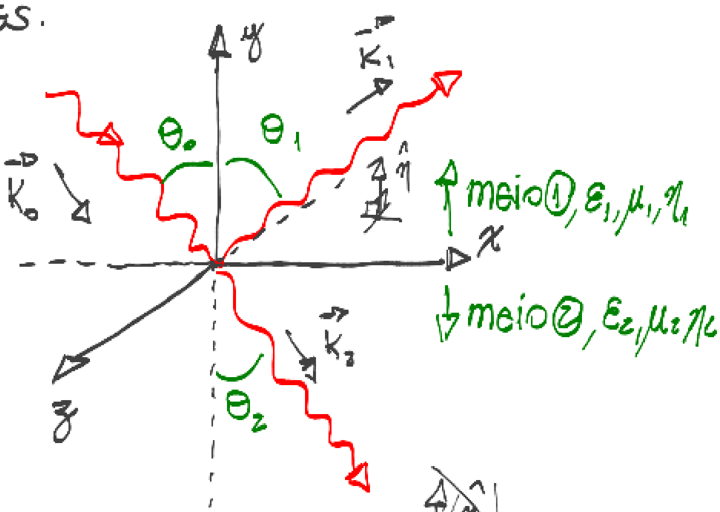
$$\int_{\partial\Sigma} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma_{\xi\mapsto 0}} \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$$

$$\vec{E}_2\cdot d\vec{l} - \vec{E}_1\cdot d\vec{l} = 0, \quad \vec{E}_2\times\hat{\eta} - \vec{E}_1\times\hat{\eta} = 0 \quad \boxed{(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\times\hat{\eta} = \vec{0}} \;//$$

A mesma condição é válida para $\vec{H}$ $\boxed{(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\times\hat{\eta} = \vec{0}}$ //

Ou seja, apenas as componentes tangentes/paralelas à interface dos campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são contínuas. Veja que existe uma descontinuidade nesta direção p/ os campos $(\vec{D})$ e $(\vec{B})$.

⇒ Agora possuímos todos os ingredientes necessários para o desmembramento deste problema, abaixo segue um glossário de definições.



$\theta_0 \equiv$ ângulo de incidência
$\theta_1 \equiv$ " " reflexão
$\theta_2 \equiv$ " " refração

$\vec{K}_0 \equiv$ Vetor de onda incidente
$\vec{K}_1 \equiv$ " " " refletido
$\vec{K}_2 \equiv$ " " " refratado
$\hat{\eta} \equiv$ Versor normal à interface de incidência

Se $\hat{K}_0\cdot\hat{\eta} \neq 1 \rightarrow$

$\rightarrow$ Incidência oblíqua / (não normal)
$\hat{\eta}$ e $\hat{K}_0$ definem o "plano" de incidência

12.3 Relação entre o ângulo de incidência θ_0, reflexão θ_1 e refração θ_2 → (Lei da Reflexão e Lei de Snell-Descartes)

⇒ Vamos começar com a forma auxiliar complexa da onda eletromagnética, e ficamos com:

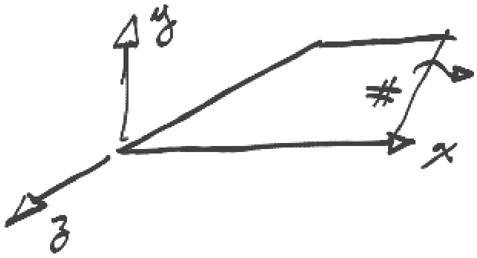
$$\vec{E}_0(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}_0\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad \text{, onda incidente}$$

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_1\, e^{i(\vec{k}_1\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad \text{, onda refletida}$$

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_2\, e^{i(\vec{k}_2\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad \text{, onda refratada}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{\eta}\hat{k}\times\vec{B}} \; , \quad \boxed{\vec{B} = \eta\, \hat{k}\times\vec{E}} \; , \quad \boxed{\vec{B} = \mu\vec{H}} \; , \quad \boxed{\vec{H} = \frac{\eta}{\mu}\hat{k}\times\vec{E}}$$

Sem perda de generalidade tomemos o plano da interface como o plano (x,z) ou seja, $\boxed{y=0}$



\# Interface (plano $y=0$)

\# Ficamos com:

$$\left.\begin{aligned}
\vec{H}_0 &= \frac{\eta_0}{\mu_0}\hat{k}_0\times\vec{E}_0 \\
\vec{H}_1 &= \frac{\eta_1}{\mu_1}\hat{k}_1\times\vec{E}_1 \\
\vec{H}_2 &= \frac{\eta_2}{\mu_2}\hat{k}_2\times\vec{E}_2
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
\eta_0 &= \eta_1 \\
\varepsilon_0 &= \varepsilon_1 \\
\mu_0 &= \mu_1
\end{aligned}
\left\}\begin{aligned}
\vec{H}_0 &= \frac{\eta_1}{\mu_1}\hat{k}_0\times\vec{E}_0 \\
\vec{H}_1 &= \frac{\eta_1}{\mu_1}\hat{k}_1\times\vec{E}_1 \\
\vec{H}_2 &= \frac{\eta_2}{\mu_2}\hat{k}_2\times\vec{E}_2
\end{aligned}\right.$$

⇒ Aplicando a condição de contorno para a componente tangencial do campo $\vec{E}$ na interface, temos:

$$\hat{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \;\to\; \hat{n}\times\vec{E}_1 = \hat{n}\times\vec{E}_2 \;\to\; \boxed{E_{1,t} = E_{2,t}}$$

$$\hat{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{0} \;\to\; \hat{n}\times\vec{H}_1 = \hat{n}\times\vec{H}_2 \;\to\; \boxed{H_{1,t} = H_{2,t}}$$

$$\vec{E}_2 \mapsto \vec{E}_2 \,, \quad \vec{E}_1 \mapsto \vec{E}_0 + \vec{E}_1$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1) = \hat{n} \times (\vec{E}_2)$$
$$\hat{n} \times (\vec{E}_0 + \vec{E}_1) = \hat{n} \times (\vec{E}_2)$$

$$\hat{n} \times \left(\vec{E}_0^\circ e^{i\vec{K}_0 \cdot \vec{r}} + \vec{E}_1^\circ e^{i(\vec{K}_1 \cdot \vec{r})} \right) e^{-i\omega t} = \hat{n} \times \vec{E}_2^\circ e^{i\vec{K}_2 \cdot \vec{r}} \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\hat{n} \times \left(\vec{E}_0^\circ e^{i\vec{K}_0 \cdot \vec{r}} + \vec{E}_1^\circ e^{i\vec{K}_1 \cdot \vec{r}} \right) = \hat{n} \times \left(\vec{E}_2^\circ e^{i\vec{K}_2 \cdot \vec{r}} \right)$$

Note que essa condição de contorno deve ser válida para todo plano $y=0$, e não depende de x ou z.

Essa condição é satisfeita se na interface a fase de todos os campos é a mesma, ou seja:

$$e^{i\vec{K}_0 \cdot \vec{r}} = e^{i\vec{K}_1 \cdot \vec{r}} = e^{i\vec{K}_2 \cdot \vec{r}}$$

ou ainda que:

$$i\vec{K}_0 \cdot \vec{r} = i\vec{K}_1 \cdot \vec{r} = i\vec{K}_2 \cdot \vec{r} \mapsto \boxed{\vec{K}_0 \cdot \vec{r} = \vec{K}_1 \cdot \vec{r} = \vec{K}_2 \cdot \vec{r}} //$$

No plano $y=0$, $\boxed{\vec{r} = x\hat{x} + z\hat{z}}$ //

Sem perda de generalidade, vamos tomar $\boxed{\vec{K}_0 = K_{0x}\hat{x} + K_{0y}\hat{y}}$

ou seja $\vec{K}_0$ não possui componente na direção $\hat{z}$, $\boxed{K_{0z} = 0}$

Com isso quais componentes compõem $\vec{K}_1$ e $\vec{K}_2$?

$$\vec{K}_0 \cdot \vec{r} = (K_{0x}\hat{x} + K_{0y}\hat{y}) \cdot (x\hat{x} + z\hat{z}) = K_{0x}x(\hat{x}\cdot\hat{x})$$ Igual

$$\vec{K}_1 \cdot \vec{r} = (K_{1x}\hat{x} + K_{1y}\hat{y} + K_{1z}\hat{z}) \cdot (x\hat{x} + z\hat{z}) = K_{1x}x(\hat{x}\cdot\hat{x}) + K_{1z}z(\hat{z}\cdot\hat{z})$$ igual

$$\vec{K}_2 \cdot \vec{r} = (K_{2x}\hat{x} + K_{2y}\hat{y} + K_{2z}\hat{z}) \cdot (x\hat{x} + z\hat{z}) = K_{2x}x(\hat{x}\cdot\hat{x}) + K_{2z}z(\hat{z}\cdot\hat{z})$$

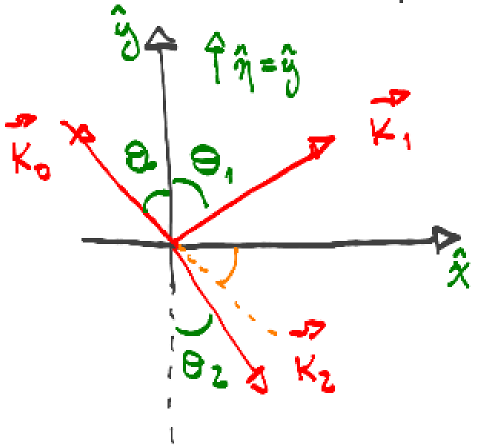
A única solução é que $K_{1z} = 0$ e $K_{2z} = 0$, ou seja, não há componentes na direção z de $\vec{K}_1$ e $\vec{K}_2$ se $\vec{K}_0$ não possui componente nesta direção.

\# Não há portanto componentes do vetor de onda fora do plano de incidência. $\vec{K}_0$, $\vec{K}_1$ e $\vec{K}_2$ estão contidos no mesmo plano.

Em nosso exemplo esse plano de incidência é formado por todo plano ortogonal à $\hat{k}_0 \wedge \hat{\eta}$, ou todo plano paralelo ao plano (x,y).

$$\vec{K}_0 \cdot \vec{r} = \vec{K}_1 \cdot \vec{r} = \vec{K}_2 \cdot \vec{r}$$

$$\vec{K}_0 \cdot \hat{x} = \vec{K}_1 \cdot \hat{x} = \vec{K}_2 \cdot \hat{x} \quad \rightarrow \text{na interface } y=0.$$



$$\vec{K}_0 \cdot \hat{x} = K_0 \cos\left(\pi - \underbrace{\frac{\pi}{2} - \theta_0}_{\pi/2 - \theta_0}\right) = K_0 \cos(\theta_0 - \pi/2)$$

$$\vec{K}_1 \cdot \hat{x} = K_1 \cos(\pi/2 - \theta_1) = K_1 \cos(\theta_1 - \pi/2)$$

$$\vec{K}_2 \cdot \hat{x} = K_2 \cos(\pi/2 - \theta_2) = K_2 \cos(\theta_2 - \pi/2)$$

$$\vec{K}_a \cdot \hat{x} = K_a \cos(\theta_a - \pi/2)$$

$$\boxed{\vec{K}_a \cdot \hat{x} = K_a \operatorname{Sen}(\theta_a)}$$

$$v = \lambda f \qquad \lambda = \frac{v}{f}$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v} \cdot f = \frac{\omega}{v} \quad , \quad \eta = \frac{c}{v} \quad , \quad v = \frac{c}{\eta} \qquad \boxed{K_\eta = \frac{\omega}{c}\eta}$$

$\boxed{K_\eta = \frac{\omega \eta}{c}}$ → conhecida como relação de dispersão.

Assim, na interface a seguinte relação é verdadeira:

$$\vec{K}_0 \cdot \vec{r} = \vec{K}_1 \cdot \vec{r} = \vec{K}_2 \cdot \vec{r}$$

$$\vec{K}_0 \cdot \hat{x} = \vec{K}_1 \cdot \hat{x} = \vec{K}_2 \cdot \hat{x}$$

$$K_0 \operatorname{Sen}\theta_0 = K_1 \operatorname{Sen}\theta_1 = K_2 \operatorname{Sen}\theta_2$$

$$\frac{\omega}{c}\eta_0 \operatorname{Sen}\theta_0 = \frac{\omega}{c}\eta_1 \operatorname{Sen}\theta_1 = \frac{\omega}{c}\eta_2 \operatorname{Sen}\theta_2$$

$$\boxed{\eta_0 \operatorname{Sen}\theta_0 = \eta_1 \operatorname{Sen}\theta_1 = \eta_2 \operatorname{Sen}\theta_2} \; //$$

Como: $\eta_0 = \eta_1$ então $\eta_0 \operatorname{Sen}\theta_0 = \eta_1 \operatorname{Sen}\theta_1$

$$\boxed{\theta_0 = \theta_1}$$

Desse modo o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão (Primeira lei da óptica geométrica)

E ainda: $\boxed{\eta_0 \operatorname{Sen}\theta_0 = \eta_2 \operatorname{Sen}\theta_2}$ → Lei de Snell-Descartes
-refração entre dois meios dielétricos

$\theta_2 \equiv$ ângulo de refração
(sempre entre o feixe e a normal à interface)

$n_0 \operatorname{Sen}\theta_0 = n_2 \operatorname{Sen}\theta_2$

$$\boxed{\frac{n_0}{n_2} = \frac{\operatorname{Sen}\theta_2}{\operatorname{Sen}\theta_0}} \rightarrow \boxed{\operatorname{Sen}\theta_2 = \frac{n_0}{n_2}\operatorname{Sen}\theta_0}$$

$$\boxed{\theta_2 = \operatorname{arc\,Sen}\left(\frac{n_0 \operatorname{Sen}\theta_0}{n_2}\right)}$$

$\mapsto$ Se $n_2 > n_0$ Sempre existe Solução REAL para θ_2. p/ qualquer θ_0
$0 < \theta_0 \leq \pi/2$

Mas se $n_0 > n_2$ Não existirá valores reais para θ_2 se θ_0 for maior que:

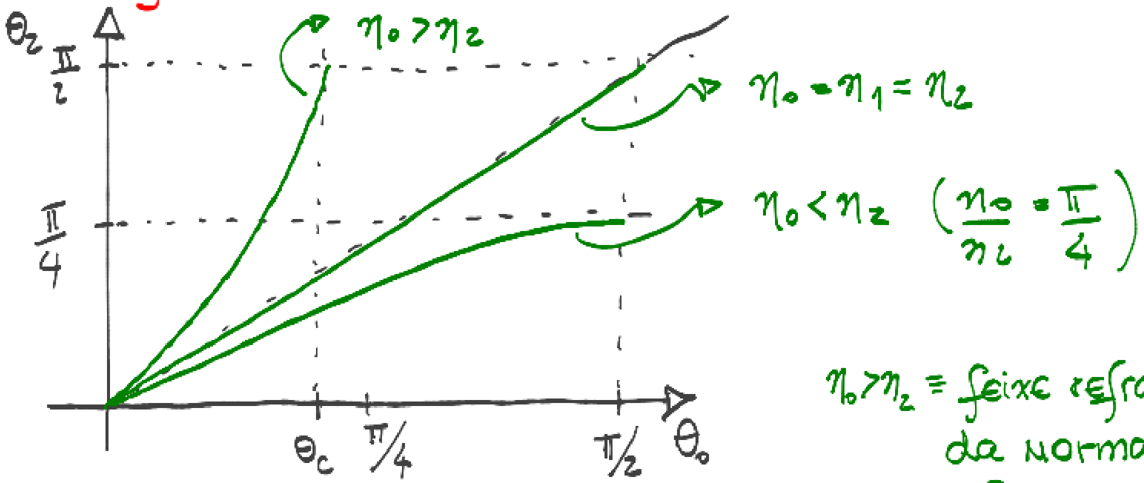
$$\boxed{\theta_0 > \operatorname{arc\,Sen}\left(\frac{n_2}{n_0}\right)} \qquad 0 < \theta_0 \leq \theta_c$$

Neste Caso existe um ângulo límite ou ângulo crítico θ_c onde

$$\boxed{\theta_c = \operatorname{arc\,Sen}\left(\frac{n_2}{n_0}\right)}$$

, acima do qual Não haverá onda refratada $\vec{k}_2$ de $\vec{E}_2$.

⇒ Relação entre o ângulo de incidência θ_0 e refração θ_2



$n_0 > n_2$ = feixe refratado se afasta da normal

$n_0 < n_2$ = feixe Refratado se aproxima da normal

* Quando θ_0 é maior que θ_c para $n_0 > n_2$, a luz não mais se propaga no segundo meio como uma onda eletromagnética. Neste caso uma onda evanescente é formada e decai em amplitude rapidamente. Mostraremos que neste caso toda energia associada a onda incidente é refletida de volta ao meio de origem.

$\mapsto$ Para isso estudaremos na próxima secção a relação entre as amplitudes das ondas incidente, refletida e refratada.