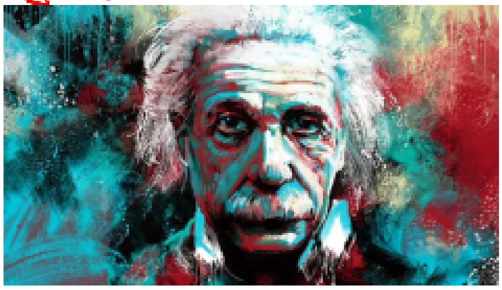
Capítulo 8 ⇒ Relatividade especial (Introdução)



A famosa teoria da relatividade especial ou restrita de Albert Einstein talvez seja uma das grandes quebras de paradigma da ciência. E alterou completamente nossa forma de ver e compreender matemática e fisicamente o mundo à nossa volta. É o momento da história onde nossa própria compreensão de tempo e espaço é alterada. Essa "nova" interpretação do espaçotempo é reveladora e mostra o lado elegante e inquestionável da física. Apesar de ser uma das teorias bem mais testadas dos últimos 100 anos, ainda hoje existem céticos de seu fundamento. Meu papel aqui é guiar o aluno numa viagem do conhecimento físico e de construção matemática sólida e coerente na busca do entendimento da teoria relativística.

Comecemos respondendo duas perguntas iniciais:

① Serão as leis da física válidas em qualquer referencial (inercial)?

② Será possível a existência de um referencial absoluto (privilegiado) em que uma lei seja válida e outra não?

Mecânica clássica Newtoniana (3 leis de Newton)

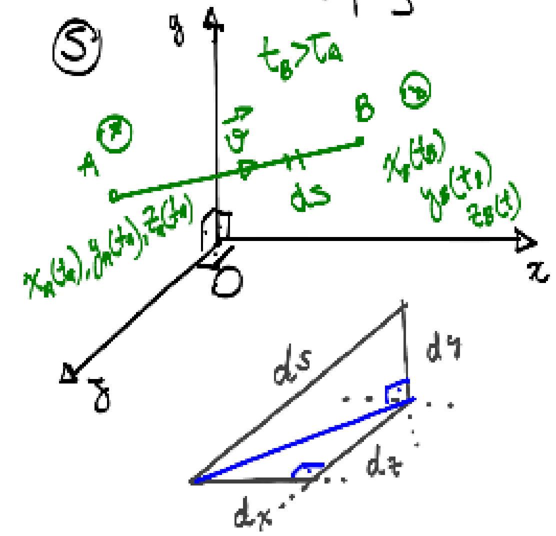
① lei da inércia ② $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$ ③ Ação e reação

① ⇒ repouso $\vec{v} = \vec{0}$ ou M.R.U se $\vec{F} = \vec{0}$

② ⇒ $\vec{F}$ = resultado de uma interação entre partículas, força gravitacional, força elétrica, etc..

③ ⇒ Partícula (corpo) que puxa é igualmente puxado e que empurra é igualmente empurrado.

Na mecânica Newtoniana clássica medimos movimento (ou repouso) com a ajuda de um referencial espacial (geralmente cartesiano) e um relógio que marca a passagem do tempo, de forma absoluta e indiscriminada para todas as posições do referencial. Vamos relembrar a medida de deslocamentos neste espaço.



⇒ Partícula se move do ponto A (x_A, y_A, z_A) ao ponto B (x_B, y_B, z_B) no referencial (S) com origem em O.

⇒ (S) Espaço euclidiano tridimensional, cujo menor elemento de deslocamento no espaço (elemento de linha) $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

⇒ E um único relógio marca o mesmo tempo t para todos os pontos espaço $(x(t), y(t), z(t))$.

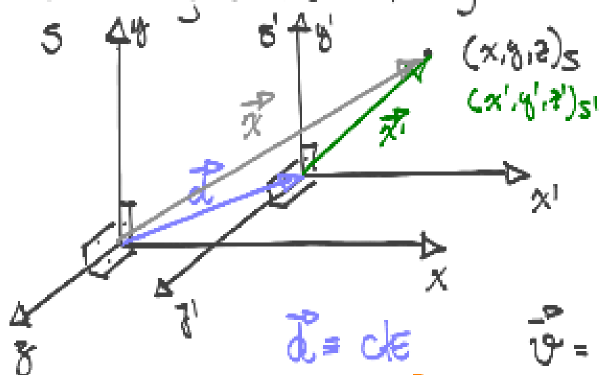
8.1 ⟹ Validade da primeira lei entre referenciais inerciais

A lei da inércia é válida para qualquer referencial que seja inercial, ou seja, que esteja em repouso ou em M.R.U (movimento retilíneo uniforme. [Agora, em "repouso" ou "M.R.U" com relação à que?]

A lei é inválida em referênciais acelerados, onde há o aparecimento de forças virtuais como centripeta, coriolis, etc. (exemplo é o pêndulo de Foucault)

⇒ Vamos construir referenciais inerciais por translação, rotação e M.R.U e verificar a validade da primeira lei para uma partícula em repouso.

Construção de um referencial inercial por translação



$$\left.\begin{aligned}\vec{x} &= (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}),\ t \\ \vec{x}' &= (x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'),\ t'\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} t &= t' \\ \hat{i} &= \hat{i}' \\ \hat{j} &= \hat{j}' \\ \hat{k} &= \hat{k}'\end{aligned}$$

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{d} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{x}' + \vec{d} = \vec{x}$$

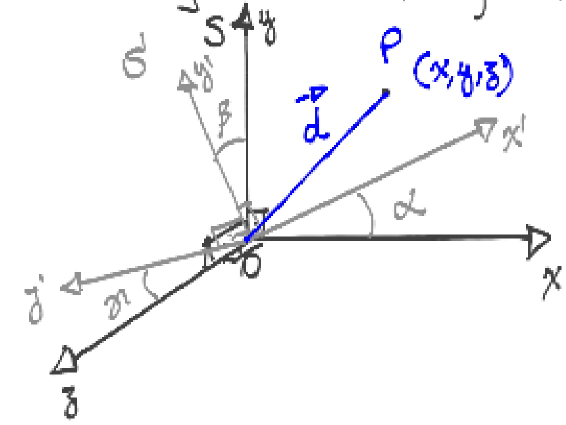
$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{0}$$

repouso em ambos referenciais

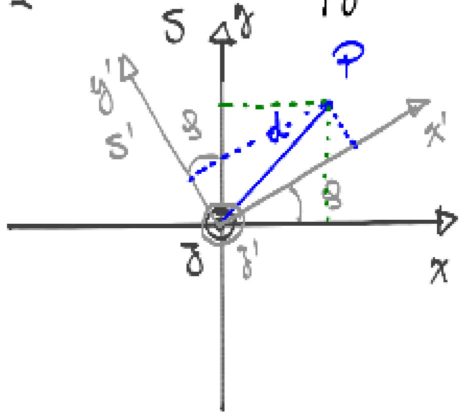
$$\vec{v}' = \frac{d\vec{x}'}{dt'} = \frac{d\vec{x}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{x} - \vec{d}) = \frac{d\vec{x}}{dt} - \frac{d\vec{d}}{dt} = \vec{0}$$

* verifique que se $\vec{v} \neq \vec{0} = cte$
$\vec{v}' \neq \vec{0} \longleftrightarrow \vec{v}' = \vec{v}$, mesma velocidade medida em ambos os referenciais.

Construção de um referencial inercial por rotação



* Façamos um exemplo com rotação φ em torno do eixo z. ⇒



Note então que o ponto P possui coordenadas diferentes com relação à S e a S'. Verifique no aconchego de sua casa ou da biblioteca que:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned}} \quad \text{ou ainda} \quad \boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned}}$$

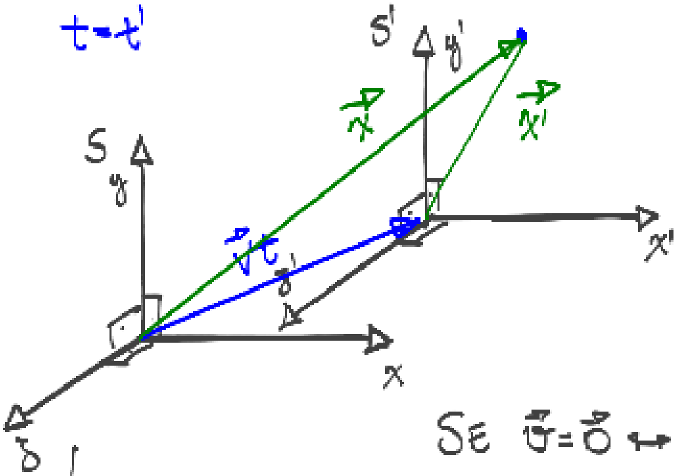
$$\boxed{t = t'} \qquad \boxed{z' = z}$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \cos\varphi\frac{dx}{dt} + \sin\varphi\frac{dy}{dt} = 0 = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt} = -\sin\varphi\frac{dx}{dt} + \cos\varphi\frac{dy}{dt}$$

↳ A rotação de um referencial inercial também é inercial.

Construção de um referencial por movimento retilíneo uniforme

$t = t'$



$$\vec{x} = \vec{x}' + \vec{V}t$$

$$\boxed{\vec{x}' = \vec{x} - \vec{V}t}$$

$$t = t'$$

$$\vec{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{x}' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}$$

$$x' = x - V_x t$$

$$y' = y - V_y t$$

$$z' = z - V_z t$$

$$t = t'$$

Se $\vec{F} = \vec{0} \leftrightarrow \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{0} \leftrightarrow \frac{d\vec{x}'}{dt'} = \frac{d\vec{x}'}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt} - \vec{V} = -\vec{V} = cte$ (M.R.U)

↳ O referencial também é inercial

$t = t'$ ⇒ tempo Absoluto e "universal", na mecânica newtoniana eventos simultâneos (que ocorrem num mesmo tempo) em um referencial devem então ser simultâneos quando observados de outro referencial inercial.

$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{V}t$, $t = t'$ ⇒ É o conjunto de transformações relativísticas galileanas clássicas.

Uma informação é fundamental para continuarmos a discussão das transformações relativísticas, que o entendimento de intervalo, neste caso o intervalo espacial entre duas posições, infinitesimalmente $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Verifique que essa "distância" (intervalo) entre dois pontos é a mesma em todos os referenciais inerciais

$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$, ds^2 é portanto, uma quantidade conservada ou invariante frente essas transformações.

Não há como distinguir entre referenciais inerciais, assim um referencial não acelerado (ausência de forças "mágicas") é inercial.

8.2 → Equações de Maxwell (Leis do eletromagnetismo)

Onda eletromagnética $(\vec{E}(t), \vec{B}(t))$ se propaga no vácuo com velocidade constante c. Dada pela solução da equação de onda:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = \vec{0}, \quad \text{onde} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Mas c = cte é sempre a mesma com relação à qual referencial?

Há então uma inconsistência com a própria definição de referencial.

Dessa incoerência nasce a seguinte questão:

Haverá um referencial absoluto (éter)?

→ Quais são minhas opções?

1. O eletromagnetismo é correto
   Leis da mecânica estão corretas
   Existe o éter
2. As leis da mecânica estão corretas
   Não existe o éter
   As leis do eletromagnetismo devem ser modificadas
3. O eletromagnetismo está correto
   Não existe o éter
   As leis da mecânica devem ser modificadas

S' move-se p/ direita com velocidade V c/ relação S.
A onda em viaja a c em S

$x' = x - Vt \rightarrow \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V$

$v_x' = c - V \rightarrow \boxed{|v_x'| < |c|}$

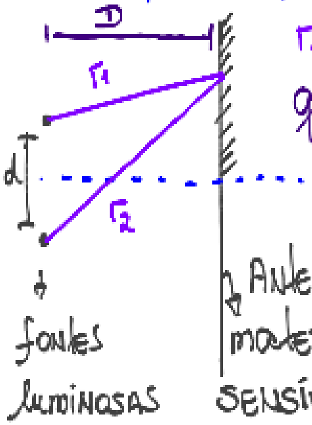
Relembrando as equações de Maxwell

- Lei de Gauss $\longleftrightarrow$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ "
- Ausência de monopólo magnético $\longleftrightarrow$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ "
- Lei de indução de Faraday $\longleftrightarrow$ $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ "
- Lei de Ampére Modificada $\longleftrightarrow$ $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ "

8.3 → O experimento de Michelson-Morley

→ Interferência óptica entre feixes da mesma fonte luminosa

Exemplo exploratório (veremos em detalhes esse fenômeno no curso)

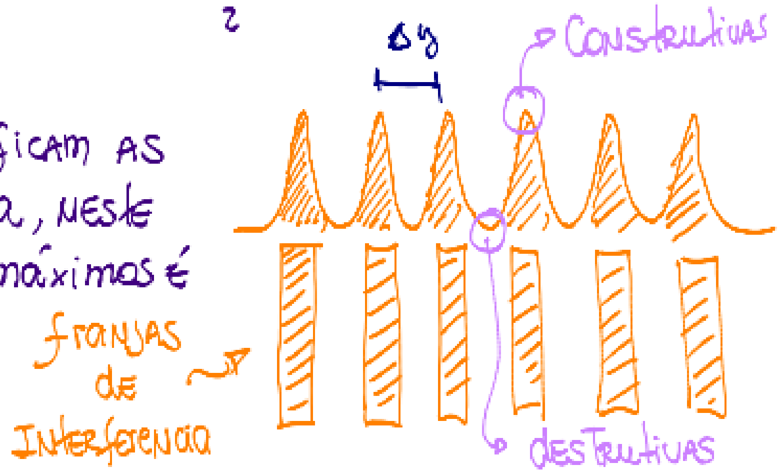


r_1 e r_2 = caminhos ópticos percorridos pelos feixes quando:

(r_2-r_1) = diferença de caminho óptico = $m\lambda$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ observamos o fenômeno da interferência construtiva e se $(r_2-r_1)=(2m+1)\dfrac{\lambda}{2}$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ da destrutiva.

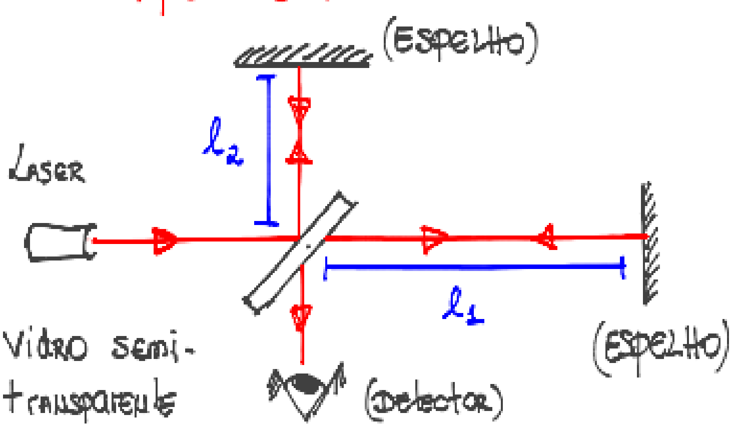
⇒ Marcadas no anteparo sensível ficam as chamadas franjas de interferência, neste exemplo a separação entre seus máximos é

$$\boxed{\Delta y=\frac{D\lambda}{d}}$$

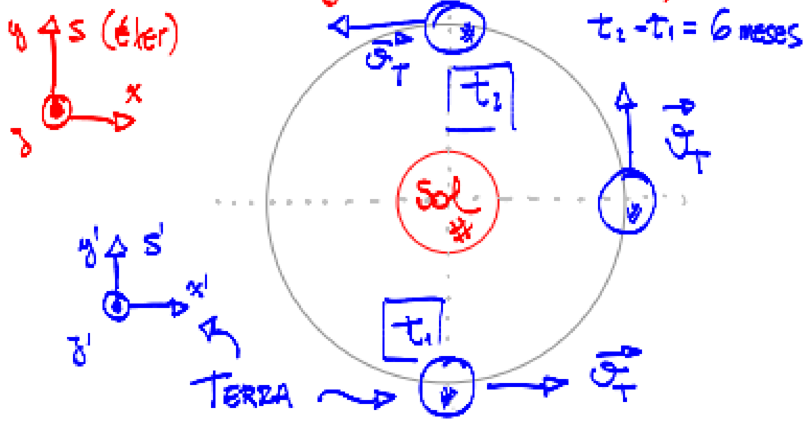


* O ponto desse experimento é que se a luz/onda em viaja a velocidade constante c em relação à um referencial Absoluto (Éter) uma alteração do caminho óptico (r_2-r_1) leva a uma mudança da posição das franjas de interferência

O experimento



Éter como ref. Absoluto (Sol)



\# Calculemos no tempo t_1 a diferença de caminho óptico $\Delta\ell$

$\Delta\ell = 2\ell_1 - 2\ell_2 = c\tau_1 - c\tau_2$

No braço ℓ_1 temos

fóton/onda possui velocidade

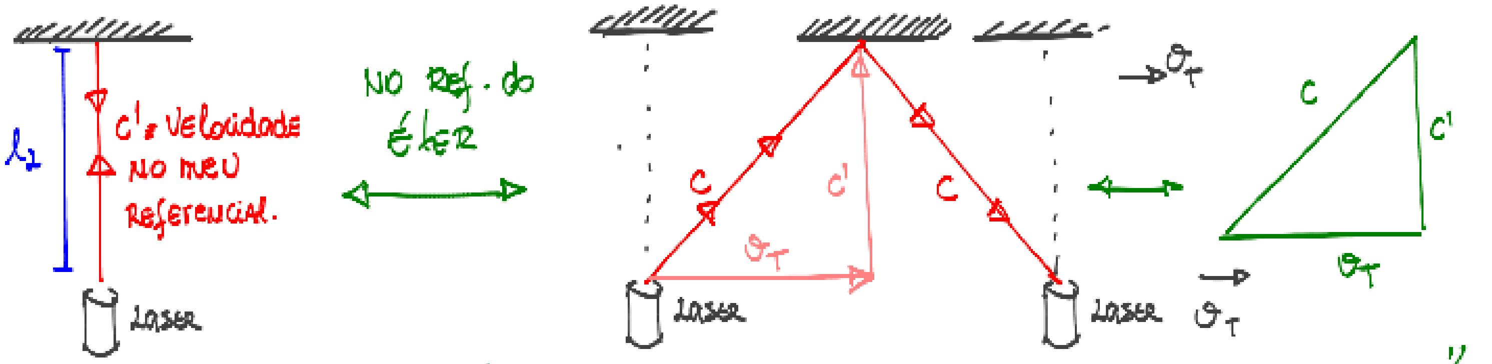
c c/ relação ao éter
c' c/ " à terra

Então $c' = c - v_T$, ida; $c' = c + v_T$, volta } tempo total de ida + volta τ_1 onde $\tau_1 = \dfrac{\ell_1}{c - v_T} + \dfrac{\ell_1}{c + v_T} = \dfrac{2\ell_1 c}{c^2 - v_T^2}$

$\tau_1 = \dfrac{2\ell_1 c}{c^2\left(1 - \frac{v_T^2}{c^2}\right)} = \dfrac{2\ell_1}{c(1-\beta^2)}$, onde $\beta = \dfrac{v_T}{c} \ll 1$

$$\boxed{\tau_1 = \frac{2\ell_1}{c(1-\beta^2)}}$$

* tempo de ida + volta na direção ortogonal ℓ_2



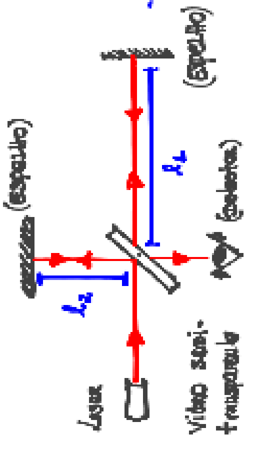
Assim na terra $c^2 = c'^2 + v_T^2 \leftrightarrow c'^2 = c^2 - v_T^2 \leftrightarrow c' = c\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}} = c(1-\beta^2)^{1/2}$

então $\boxed{c' = c(1-\beta^2)^{1/2}}$, tempo de ida + volta $\rightarrow$ $\boxed{\tau_2 = \dfrac{2\ell_2}{c(1-\beta^2)^{1/2}}}$

A diferença de caminho óptico vale:

$\Delta\ell = c\tau_1 - c\tau_2 = c\left(\dfrac{2\ell_1}{c(1-\beta^2)} - \dfrac{2\ell_2}{c(1-\beta^2)^{1/2}}\right) \leftrightarrow \boxed{\Delta\ell = \dfrac{2}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\dfrac{\ell_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \ell_2\right)}$

* Posso agora esperar 6 meses para refazer a medida das franjas de interferência ou rotaciono o experimento em 90° (Fácil!)



Refazendo as contas os tempos de ida + volta de cada braço do interferômetro é:

$\tau_1' = \dfrac{2\ell_1}{c(1-\beta^2)^{1/2}}$, $\tau_2' = \dfrac{2\ell_2}{c(1-\beta^2)}$ $\rightarrow$ então $\Delta\ell' = c\tau_1' - c\tau_2'$

$$\boxed{\Delta\ell' = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\ell_1 - \frac{\ell_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)}$$

Note que se existe um referencial absoluto (éter) onde a luz possui velocidade constante igual à $c_{\parallel}$, há uma diferença entre os caminhos ópticos no interferômetro quando a velocidade da terra com relação ao éter muda. Essa variação vale $\Delta l' - \Delta l$ num intervalo de 6 meses ou na rotação de 90° do experimento.

Onde temos: $$\Delta l' - \Delta l = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}}(l_1 + l_2)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Como $\beta = \frac{v_T}{c} << 1$

Podemos expandir em série de taylor $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{\beta}{2} + \dots$

ficamos com:
$$\Delta l' - \Delta l = 2\left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right)(l_1 + l_2)\left(1 - 1 - \frac{\beta^2}{2}\right)$$

$$\boxed{\Delta l' - \Delta l = -(l_1 + l_2)\beta^2 - \frac{(l_1 + l_2)\beta^4}{2}}$$

* Deslocamento das franjas de interferência

$$\delta = \frac{\Delta l' - \Delta l}{\lambda} = -\frac{(l_1 + l_2)\beta^2}{\lambda} - \frac{(l_1 + l_2)\beta^4}{2\lambda} + \dots$$

$l_1 + l_2 = 20m$

$\lambda = 3{,}4\,\mu m$ (He-Ne)

$\beta = 10^{-4}$, $\beta = \frac{v_T}{c} = \frac{30 \text{ Km.s}^{-1}}{300.000 \text{ Km.s}^{-1}}$

$$\boxed{\delta = \frac{-20 \times 10^{-8}}{3{,}4 \times 10^{-6}} \simeq 0.05}$$

→ É esperado, portanto, uma variação de 5% na alteração da posição dos máximos de interferência (foi detectado um limite superior de 0,01 %)

Experimentos mais modernos com maiores comprimentos l_1 e l_2 e lasers, preveem uma alteração $\delta = 0{,}7$ (70 %) A melhor medição mostrou um limite máximo de 0,02 %)

Resultado! ⇒ Não há éter, não existe referencial absoluto. Precisamos então repensar as leis da mecânica clássica e melhorar as transformações de Galileu!