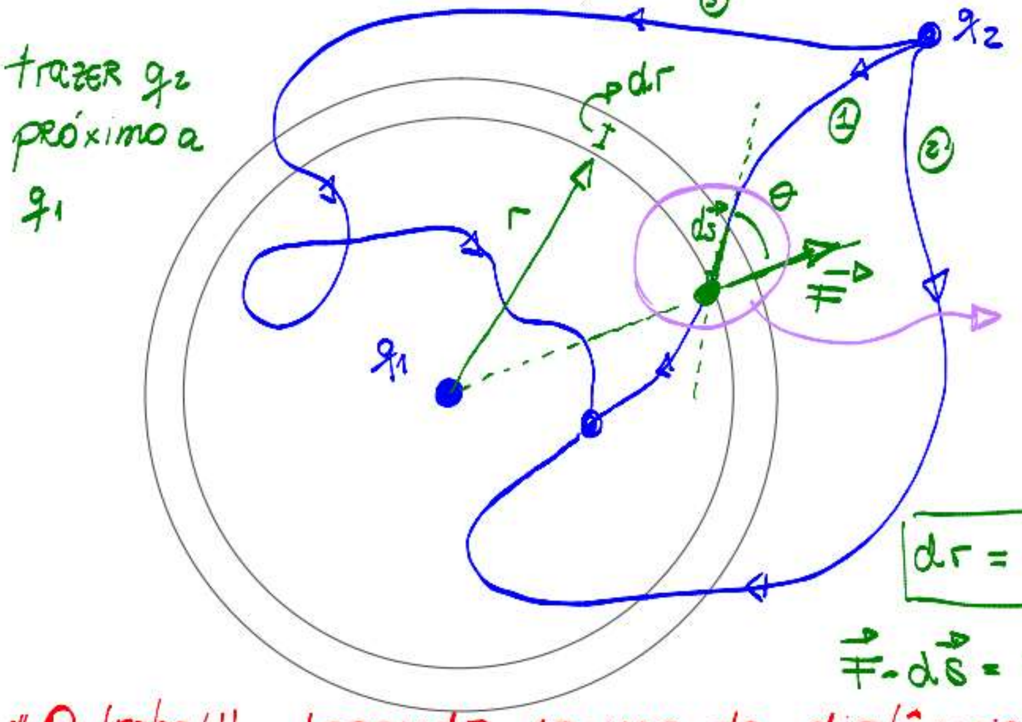
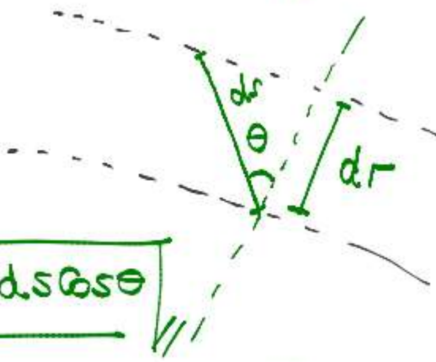
A lei de coulomb mostra que da mesma forma que a força gravitacional, a força eletrostática é uma força central, ou seja, uma carga ocupando a posição de uma casca esférica está sempre sobre ação da mesma força (valor absoluto) ao interagir com uma carga ao centro da esfera. Uma consequência importante da força central é que o trabalho do deslocamento da carga elétrica independe do caminho percorrido veja:



$$dW = -\vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$$W = -\int_{\infty}^{r} \vec{F}\cdot d\vec{s}$$



$$\boxed{dr = ds\cos\theta}$$

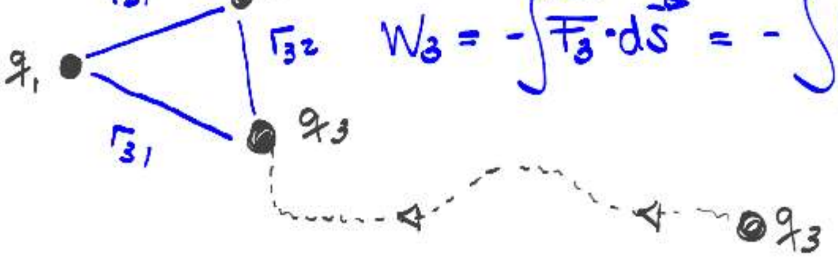
$$\vec{F}\cdot d\vec{s} = F\,ds\cos\theta = F\,dr$$

* O trabalho depende apenas da distância radial.

A energia de um sistema de cargas discretas será o trabalho realizado sob cada carga para trazê-las do infinito ao sistema, essa é a chamada energia potencial elétrica e como uma boa energia potencial escolhemos o zero de energia quando as cargas estão infinitamente separadas.

Duas cargas $\qquad W_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r_{21}}$,

Três cargas $\rightarrow W_3 \equiv$ trabalho para trazer a terceira carga do ∞



$$W_3 = -\int \vec{F}_3\cdot d\vec{s} = -\int\underbrace{(\vec{F}_{23}+\vec{F}_{13})}_{\text{princípio da superposição das forças}}\cdot d\vec{s} = -\int \vec{F}_{23}\cdot d\vec{s} - \int \vec{F}_{13}\cdot d\vec{s}$$

$$W_3 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r_{32}} q_2 q_3 \frac{1}{r^2}\,dr - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_3 \int_{\infty}^{r_{31}} \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{r_{32}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{31}}$$

O trabalho total gasto para montar o sistema de três cargas é então $W_2 + W_3$, chamaremos essa energia potencial de U.

$$U = W_2 + W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{21}} + \frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{32}}\right)$$

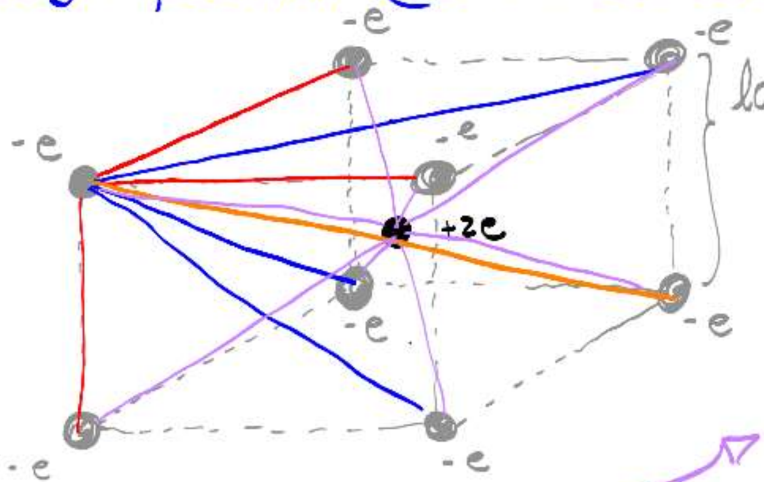
, note que não importa qual carga é trazida primeiro.

E não faz sentido associar essa energia com uma única carga. Assim para um sistema de N cargas discretas podemos generalizar:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = r_{ji},\ i \neq j$$

↳ energia potencial eletrostática

Exemplo: Qual a energia potencial de um sistema de geometria cúbica onde cargas negativas $-e$ estão nos vértices e uma carga positiva $+2e$ no seu centro geométrico. (lado a)



$$W_1 = \frac{12}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{+e^2}{a}\right)$$

$$W_2 = \frac{12}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{+e^2}{\sqrt{2}\,a}\right)$$

$$W_3 = \frac{4}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(+e)^2}{\sqrt{3}\,a}$$

$$W_4 = \frac{8}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-2e^2)}{(\sqrt{3}/2)a}$$

$$U = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

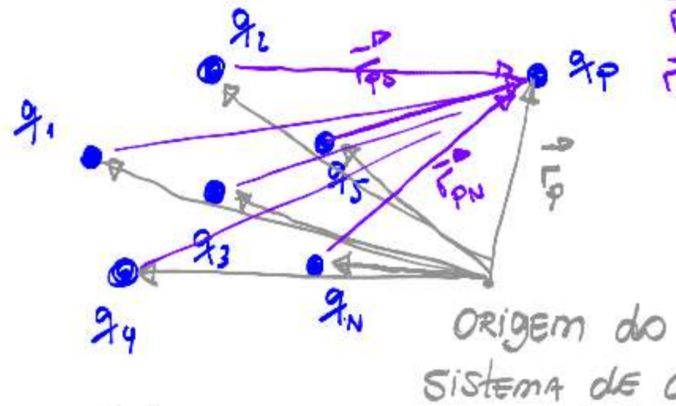
$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-16e^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} + \frac{4e^2}{\sqrt{3}\,a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}\,a} + \frac{12e^2}{a}\right) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4.32e^2}{a}, \quad U > 0$$

↳ essa é a energia do sistema que possui a potencialidade de ser utilizada, convertida por exemplo em energia cinética. Neste caso toda energia elétrica seria convertida em cinética.

1.3 → Campo elétrico

Sabemos que cargas elétricas existem na natureza e são propriedades de partículas fundamentais, que interagem mutuamente ou seja, influenciam mecanicamente e a longas distâncias umas as outras, e que uma certa configuração de cargas possui uma energia potencial associada.

Consideremos nesta secção o efeito desta configuração numa carga de prova qualquer q_p próxima à distribuição. Claramente uma força resultante atuará sob q_p que pelo princípio da superposição será:



$\vec{r}_{pN} = \vec{r}_p - \vec{r}_N$

$\vec{r}_{p5} = \vec{r}_p - \vec{r}_5$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{pi}$$

↳ Superposição (vetorial)

$$\boxed{\vec{F} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_p q_j}{r_{pj}^2} \hat{r}_{pj}}$$

Note que se a distribuição das N cargas é fixa, a força sobre a carga de prova q_p depende apenas da própria carga q_p de prova, veja:

$$\vec{F} = \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{r}_{pj}|^2} \hat{r}_{pj} \right) q_p ,$$

onde $\vec{r}_{pj}$ é a posição relativa entre a carga (j) e a posição da carga q_p.

* A força é diretamente proporcional à carga de prova por um fator constante.

↳ Essa relação nunca muda para a mesma distribuição de cargas e mesma posição da carga de prova q_p.

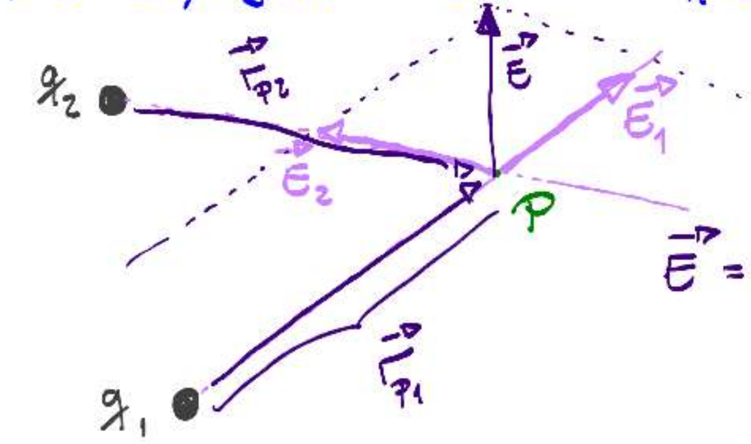
Esse fator é uma grandeza vetorial em unidades de N/C que representa uma característica da distribuição fixa de cargas esse é o nosso campo vetorial.

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r}_{pj}\, q_j}{|\vec{r}_{pj}|^2} = \vec{E}(x,y,z)$$

, Note que este campo vetorial é independente da carga de prova, mas varia para cada posição espacial (x,y,z) num certo sistema de coordenadas, assim $\vec{r}_{pj}$ → é a distância entre a carga q_j e alguma posição (x,y,z) no espaço 3D.

Cada carga elétrica cria/gera em todo espaço um campo elétrico, que é um campo vetorial, ou seja, deve possuir três informações: intensidade, direção, sentido. Quando várias cargas o campo elétrico final também é resultado de superposição.

Exemplo: Campo criado por duas cargas q_1 e q_2 num ponto P do espaço. (Vamos assumir que $q_1>0$, $q_2<0$)



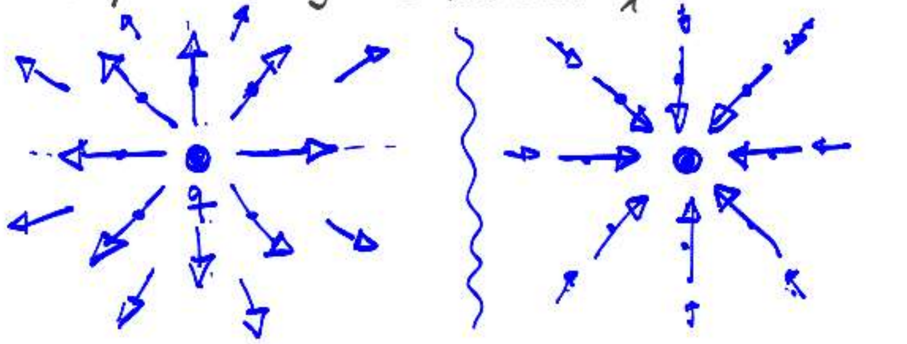
$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|r_{p1}|^2}\hat{r}_{p1}, \quad \vec{E}_2 = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|r_{p2}|^2}\hat{r}_{p2}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{|r_{p1}|^2}\hat{r}_{p1} - \frac{q_2}{|r_{p2}|^2}\hat{r}_{p2}\right)$$

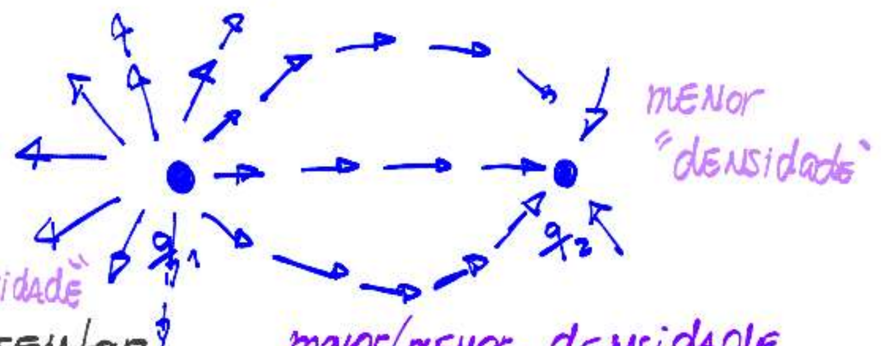
1.9 ↦ Linhas de campo elétrico

A representação gráfica de um campo vetorial não é trivial e não há uma forma completa de reprentá-la, ainda mais num pedaço de papel 2D, mas uma representação é melhor que nenhuma.

Campo elétrico criado por carga pontual q, $q>0$ ⇨
$q<0$



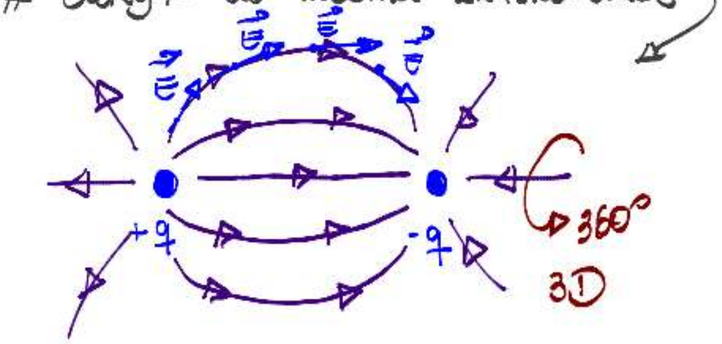
A Geometria do Campo criado por q_1 e q_2 sendo $|q_1|>|q_2|$ e $q_1>0$, $q_2<0$

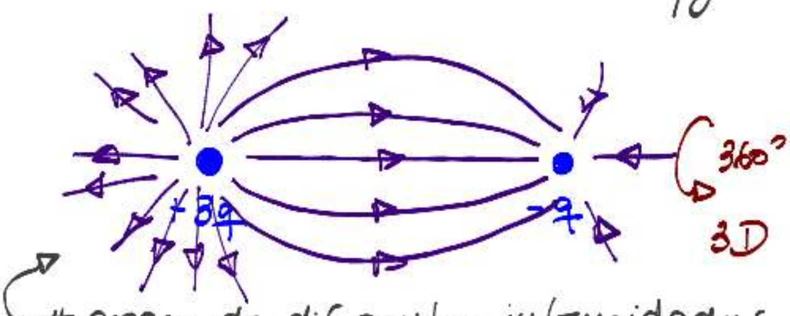


• Veja que podemos representar o campo $\vec{E}$ em cada ponto como tangente à uma linha contínua ligando as cargas.

maior/menor densidade é uma representação relativa.

\# cargas de mesma intensidade





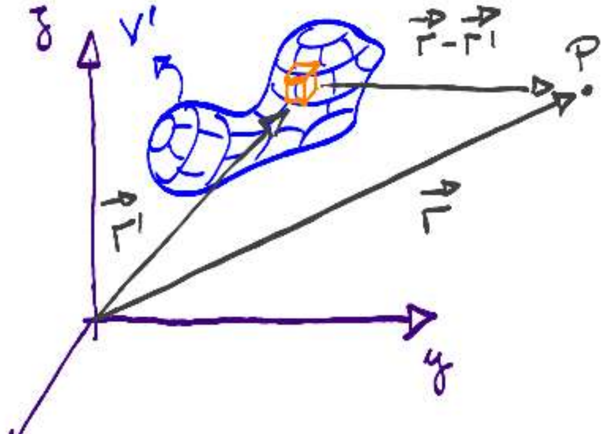
\# cargas de diferentes intensidades

☐ Veja que "sempre" o número de linhas é infinito na representação diagramática do sistema. Dessa forma essa representação é claramente qualitativa e não quantitativa!

1.10 ↦ Distribuição contínua de cargas

Apesar da quantização fundamental da carga elétrica, ela sob um olhar macroscópico pode formar distribuições contínuas (numa certa aproximação) com densidade volumétrica de carga $\rho(x,y,z)$, que pode ser uniforme ($\rho = cte$) ou não ($\rho(x,y,z)$).

Considere uma certa distribuição de volume V', com densidade $\rho(x',y',z')$, onde (!) linha são as coordenadas no volume V'!



O campo elétrico criado num ponto qualquer P do espaço é dado por $d\vec{E}$ devido à um elemento diferencial de carga.

$$\boxed{d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')} \quad //$$

O elemento de carga que gera $d\vec{E}$ é $\boxed{dq = \rho\, dv'}$ //

Assim o campo elétrico total gerado pela distribuição toda no volume V' é dado pela integral no volume V'!

$$dq = \rho\, dv' \rightarrow d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\, dv'(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \rightarrow \boxed{\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')\, dv'} \quad //$$

Lembrando que:

$dv = dx\,dy\,dz \longmapsto dv' = dx'\,dy'\,dz'$ (Elemento da distribuição)

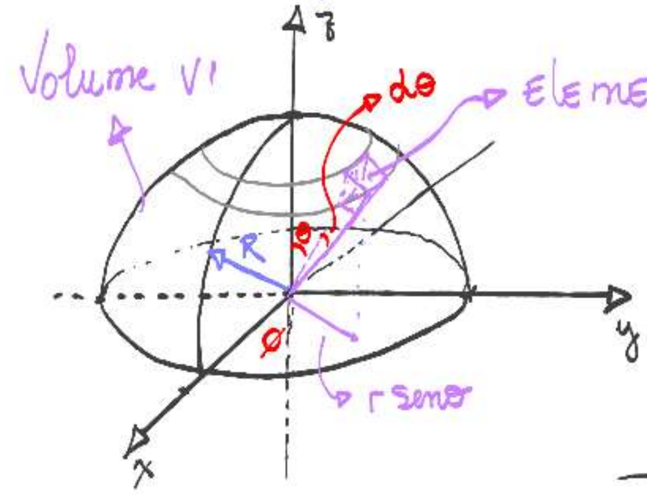
$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \longmapsto$ ponto P qualquer do espaço

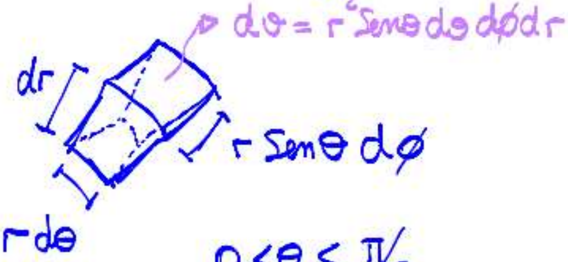
$\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z} \longmapsto$ posição do elemento de carga (dq)

↳ Coordenadas cartesianas

↦ Na integral em V' deve sobrar apenas $\vec{E}(x, y, z)$ //

Exemplo: Calcule o campo elétrico criado por uma distribuição contínua de carga ρ, uniformemente distribuida numa semi-esfera. Calcule o campo $\vec{E}$ no centro. (Semi-esfera de raio R)

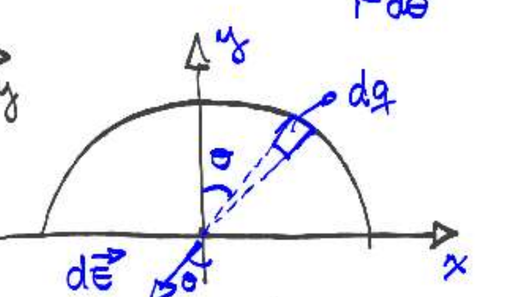




$0 \le \theta \le \pi/2$

$0 \le \phi \le 2\pi$

$0 \le r \le R$



Para todo plano tranversal cada elemento de carga cria um $d\vec{E}$ que possui duas componentes, uma vertical dE_y e uma horizontal dE_x, note que por simetria todas as componentes horizontais vão se anular mutuamente. Restando para integração apenas a componente vertical.

$$\boxed{dE_y = dE\cos\theta} \; //$$

$$E_y = \int_{V'} dE\cos\theta = \int \frac{dq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho\, dv\cos\theta}{|r'|^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho\cos\theta\, \cancel{r'^2}\operatorname{sen}\theta\, dr'\, d\theta\, d\phi}{\cancel{r'^2}}$$

$$E_y = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R dr'\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\phi = \frac{\rho\, 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}R\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{\rho R}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}2\theta\, d\theta}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \dfrac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\end{array}}$$

$$E_y = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}y\, dy = \frac{\rho R}{8\varepsilon_0}\left.-\cos y\right|_0^{\pi} \Rightarrow \boxed{E_y = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0}} \; ///$$

$$\frac{d\operatorname{sen}\theta}{d\theta} = \cos\theta, \quad \frac{d\cos\theta}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta$$

$2\theta = y \Rightarrow 2d\theta = dy \Rightarrow d\theta = \frac{dy}{2}$

$\theta = \pi/2 \rightarrow y = \pi$