⇒ Para isso é necessário uma relação dinâmica entre as fontes ($\rho, \vec{J}$) e a geração de radiação.

↦ Equações de Maxwell com fontes

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Essa fonte de radiação eletromagnética clássica possui densidade de carga (ρ) e corrente ($\vec{J}$) não nulas, com possível dependência temporal $\rho(\vec{r},t)$ e $\vec{J}(\vec{r},t)$.

Vamos explorar o fluxo de energia numa região com fontes, considere uma região no espaço com ρ e $\vec{J}$ não nulos, e um campo $\vec{E},\vec{B}$ quaisquer inclusive resultado de uma onda eletromagnética.

Temos:

$$u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \xrightarrow[\text{de potência}]{\text{densidade volumétrica}} \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}}{\mu_0\varepsilon_0}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0\vec{J}) + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot(-\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot\vec{E} - \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot\vec{B}\right] - \vec{E}\cdot\vec{J}$$

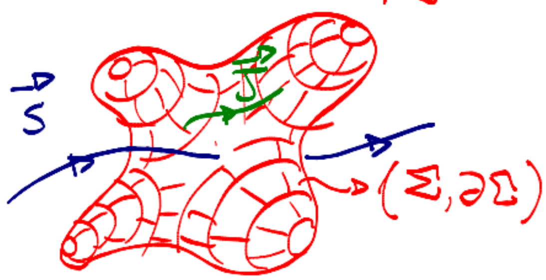
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot(\vec{B}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot\vec{J} = -\vec{E}\cdot\vec{J} - \vec{\nabla}\cdot\vec{S}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} + \vec{E}\cdot\vec{J} = 0}$$

Teorema de Poynting

O que representa $\vec{E}\cdot\vec{J}$?

Considere um volume Σ em certa região do espaço



↦ Consideremos neste volume uma certa densidade de corrente $\vec{J}$

onde $\boxed{\vec{J} = \rho\vec{v}}$ campo vetorial

Qual o trabalho realizado sobre essas cargas?

⇒ Densidade volumétrica de forças agindo sobre as cargas devido ao campo eletromagnético.

$$\vec{F}(\vec{r},t) = q\left[\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right]$$

Para uma distribuição contínua, temos que a densidade volumétrica de força é dada por:

pg 263

$$\vec{f}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)[\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)]$$

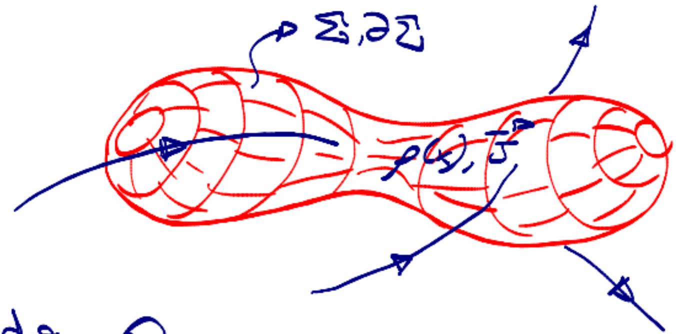
$$\boxed{\vec{f} = \rho\vec{E} + \rho\vec{v}\times\vec{B}} \qquad \boxed{\vec{J}\cdot\vec{E} = \rho\vec{v}\cdot\vec{E}}$$

$\vec{f}\cdot\vec{v}$ = densidade volumétria de potência

$$\vec{f}\cdot\vec{v} = \rho\vec{E}\cdot\vec{v} + \underbrace{\rho\vec{v}\times\vec{B}\cdot\vec{v}}_{0} = \rho\vec{E}\cdot\vec{v} = \rho\vec{v}\cdot\vec{E} = \vec{J}\cdot\vec{E}$$

$\vec{J}\cdot\vec{E} = \vec{f}\cdot\vec{v}$ ≡ trabalho por unidade de volume do campo Em sobre as cargas livres.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{f}\cdot\vec{v} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0}$$



$$\oint_\Sigma \frac{\partial u}{\partial t}\,dv + \oint_\Sigma \vec{f}\cdot\vec{v}\,dv + \oint_\Sigma \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\,dv = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\oint_\Sigma u\,dv + \oint_\Sigma \vec{f}\cdot\vec{v}\,dv + \oint_{\partial\Sigma} \vec{S}\cdot d\vec{a} = 0}$$

→ Parte da energia do campo Em é convertida em movimento das cargas ou em energia mecânica.

10.16 → Potencial vetor $\vec{A}$ e Potencial escalar φ e geração de ondas eletromagnéticas no calibre de Lorentz.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0 \rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$$

$\vec{A}$ = potencial vetor, $\vec{A}$ = fonte de campo magnético

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \mapsto \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{A} = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{0} \mapsto \vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$, $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) = \vec{0}$

rot de qq. grad é nulo

$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\varphi \rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$

$(\varphi, \vec{A}) \mapsto$ fontes de $\{\vec{E}, \vec{B}\}$

Equação de onda para o campo escalar φ e vetorial $\vec{A}$.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$

$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\varphi - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{J}}$$

→ Realizar uma transformação de calibre que não altere o resultado final.

⇒ Podemos propor uma modificação em φ e $\vec{A}$ de modo que o resultado final não se altere.

$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{a}$

$\varphi' = \varphi + \phi$

① $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \mapsto \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}' = 0$

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\times\vec{a}) = 0$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{a} = 0$ p/ $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$

temos que $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{a} = 0$, se $\vec{a} = \vec{\nabla}\lambda$, essa relação é sempre verdadeira

$\vec{a} = \vec{\nabla}\lambda$, $\lambda \equiv$ campo escalar.

② Campo elétrico $\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}(\varphi + \phi) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \vec{a}) = -\vec{\nabla}\varphi - \vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{a}}{\partial t}$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \left(\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\lambda\right) = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} - \vec{\nabla}\left(\phi + \frac{\partial \lambda}{\partial t}\right)$$

Veja que para qualquer Solução p/ ϕ e λ em que:

$\vec{\nabla}\left(\phi + \frac{\partial \lambda}{\partial t}\right) = \vec{0}$, seja verdadeiro é válida, incluindo a solução trivial

$\phi + \frac{\partial \lambda}{\partial t} = f(t)$, q.q. $f(t)$ que $\vec{\nabla} f(t) = 0$, incluindo $f(t) = 0$

Se $\boxed{\phi = -\frac{\partial \lambda}{\partial t}}$ → Não se alteram os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Existe portanto uma liberdade na escolha de $\vec{A}$ e φ, pelas relações com λ.

$$\left.\begin{aligned} \vec{A} &\to \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda \\ \varphi &\to \varphi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{aligned}\right\}$$ Essa é a chamada liberdade de Gaige ou Calibre.

O Calibre de Coulomb, podemos então escolher um campo escalar λ de modo que $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$, nesta situação nossas equações são:

$$-\nabla^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$ no calibre de Coulomb temos:

$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, equação de Poisson que no caso estático possui solução conhecida.

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}',t)\, dv}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

ou na região sem fontes

$\nabla^2\varphi = 0$, equação de Laplace.

E para o campo magnético temos

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\varphi = -\mu_0\vec{J}}$$

→ Para melhorar esta expressão, podemos escolher um outro λ,

O Calibre de Lorenz

Escolhemos λ de modo que $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0}$

E podemos reescrever as equações para as fontes da seguinte forma:

$$\boxed{\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \boxed{\Box \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

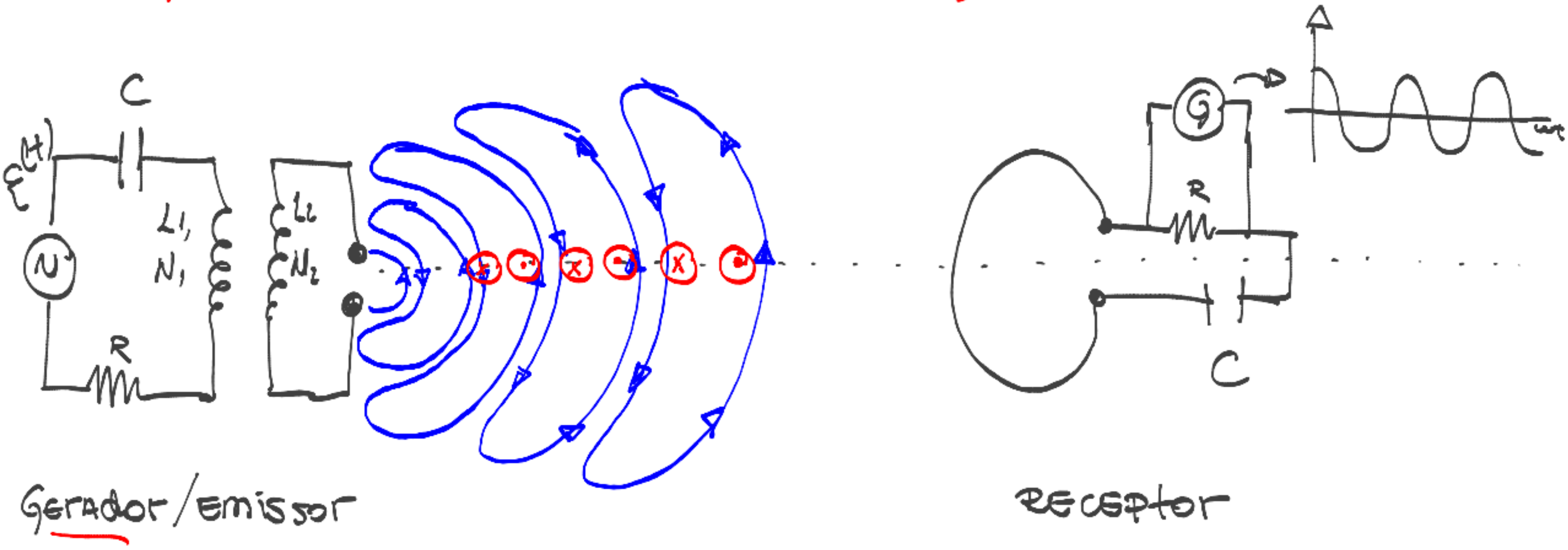
$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}} \qquad \boxed{\Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

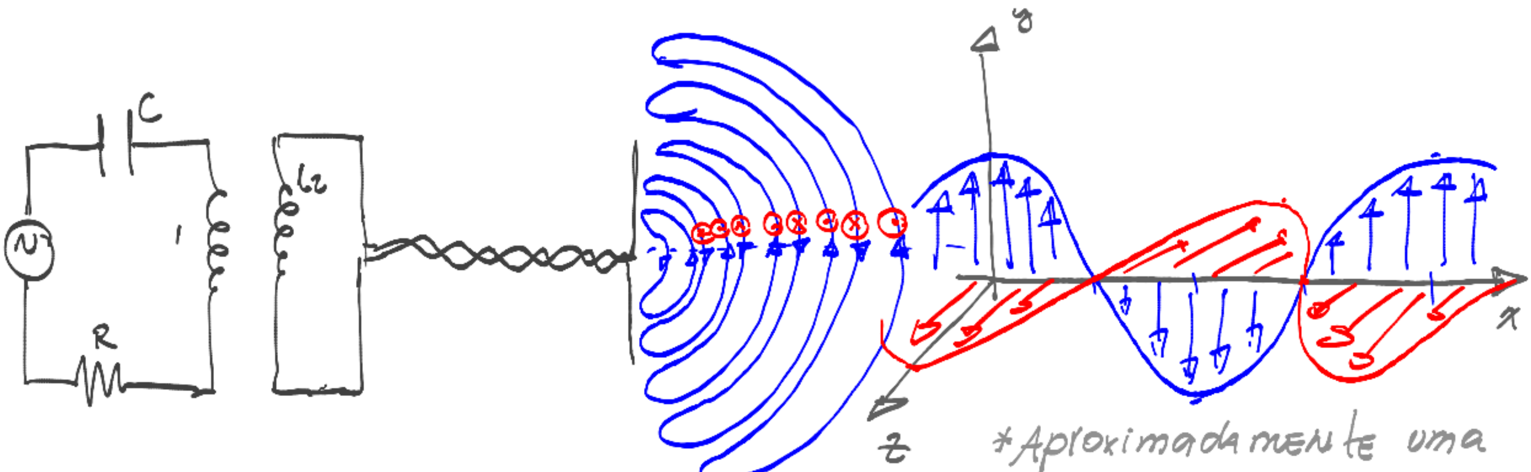
→ Os potenciais também se propagam como ondas no espaçotempo

$A^\mu = (A^0, A^i) \equiv (A^0, \vec{A}) \equiv (\varphi, \vec{A})$

$$\boxed{\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = 4\pi J^\nu}$$

10,17 → Geração e detecção de onda eletromagnética (Experimento de Hertz - 1888)





*Aproximadamente uma onda plana.