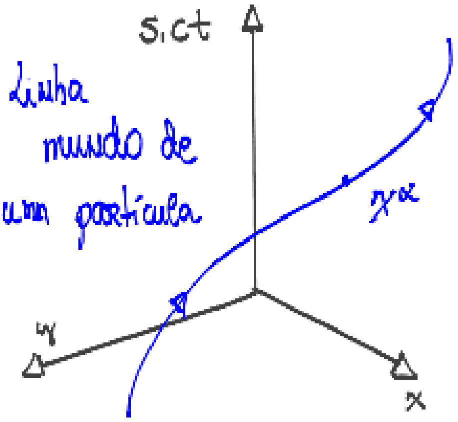
8.10.3 ↦ A quadrivelocidade (U^μ)

O quadrivetor x^μ representa a posição (EVENTO) de uma partícula/observador em um dado referencial (S), x'^μ representa este mesmo evento observado por outro referencial (S'). Se S' estiver em M.R.U com relação à S a transformação de Lorentz ("boost de Lorentz" → $\Lambda^\mu{}_\nu$) conecta as coordenadas $x^\mu \mapsto x'^\mu$ com:

$$\boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu}$$



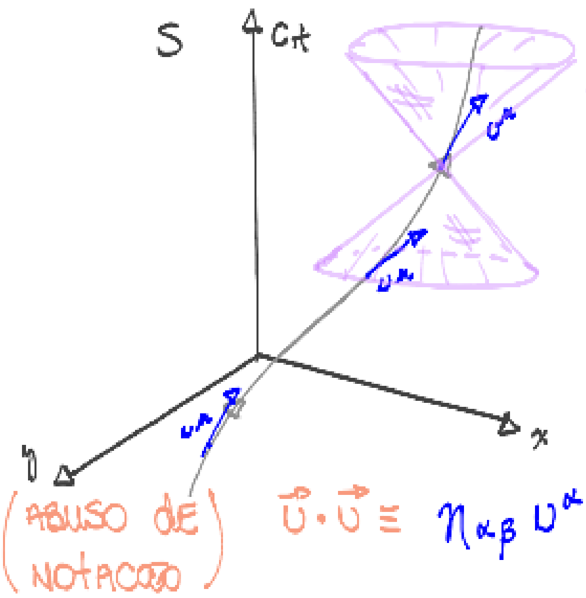
* Podemos parametrizar os eventos x^α em função de um parâmetro qualquer $\sigma \rightarrow x^\alpha(\sigma)$, ocorre que existe um parâmetro universal igual à todos os observadores, o tempo próprio da partícula (τ). τ assume um valor unívoco pelo qual podemos parametrizar os quadrivetores no espaçotempo de Minkowski.

⇨ Podemos enfim definir a quadrivelocidade de uma partícula no espaçotempo.

(ABUSO DE NOTAÇÃO) → prometo deixar de escrever isso no futuro

* Quadrivelocidade no espaçotempo de Minkowski

$$\vec{U} = \frac{dx^\mu}{d\tau} = U^\mu = \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}, \frac{dx^2}{d\tau}, \frac{dx^3}{d\tau}\right)$$



→ Quadrivelocidade de partícula real está sempre entre os limites do cone de luz.

* Calculemos a quantidade invariante entre os referenciais. O produto escalar entre as quadrivelocidade ("tamanho" de U^μ)

(ABUSO DE NOTAÇÃO) $\vec{U}\cdot\vec{U} \equiv \eta_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = \eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = \eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dt}{d\tau}\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dt}{d\tau}$

Lembre-se que $dt = \gamma d\tau \mapsto \frac{dt}{d\tau} = \gamma$, $\therefore \gamma^2 \eta_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} = \gamma^2 \frac{dx_\beta}{dt}\frac{dx^\beta}{dt}$

$$\frac{dx^\beta}{dt} = \left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (c, v_x, v_y, v_z) = (c, \vec{v}), \quad \frac{dx_\beta}{dt} = (-c, \vec{v})$$

Então:

$$\eta_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = \gamma^2 \frac{dx_\beta}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} = \gamma^2(-c^2+v^2) = -\gamma^2(1-\beta^2)c^2$$

$$\eta_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = -\frac{1}{\cancel{(1-\beta^2)}}\cancel{(1-\beta^2)}c^2 = -c^2$$ (Constante, quadrivetor do tipo temporal)

↳ vive no interior do cone de luz

* Ficamos então com a quadrivelocida $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$

$$U^\alpha \equiv \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^i}{d\tau}\right) = \left(\frac{dx^0}{dt}\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right) = (\gamma c, \gamma \vec{v}), \boxed{U^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v})}$$ //

8.10.4 ↦ O quadrivetor de momento - quadrimomento (P^μ)

$$P^\mu = m_0 U^\mu = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau} = m_0 \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} \equiv (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{v})$$

$$P^\mu = (P^0, P^i) = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{v}) = (P^0, \vec{P})$$

onde

$\vec{P} = \gamma m_0 \vec{v}$ ≡ momento relativístico p/ $\beta \to 0$, $\vec{P} \to m_0 \vec{v}$

Qual o significado físico da componente temporal $P^0 = \gamma m_0 c$?

$P^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} m_0 c$, Consideremos a aproximação não relativística onde $\beta \ll 1$ ou $v \ll c$ ou $\beta \approx 0$

↳ expandindo em série de Taylor temos:

$$P^0 = m_0 c\left(1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{3\beta^4}{8} + \dots\right)$$

$$P^0 = m_0 c + \frac{m_0 c v^2}{2c^2} + \frac{3}{8}\frac{m_0 c v^4}{c^4} + \dots$$

$$P^0 = m_0 c + \frac{m_0 v^2}{2c} + \frac{3}{8}\frac{m_0 v^4}{c^3} + \dots \quad (\times c)$$

$$cP^0 = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} + \frac{3}{8}\frac{m_0 v^4}{c^2} + \dots$$

A já conhecida energia cinética E_c. Portanto cP^0 tem unidade de energia!.

Note também que no repouso $v=0$, $cP^0 \neq 0$, resta um termo constante o famoso m_0c^2 chamada de energia de repouso $\boxed{E_0 = m_0 c^2}$

$cP^0 = E \leftrightarrow P^0 = \frac{E}{c}$, onde E é a energia relativística

ou ainda $E/c = \gamma m_0 c \leftrightarrow \boxed{E = \gamma m_0 c^2}$ //

O quadrimomento então vale

$$p^\mu = (p^0, p^i) = (\gamma m_o c, \gamma m_o \vec{v}) = (E/c, \vec{p})$$ $\begin{cases} E = \text{energia relativística} \\ \vec{p} = \text{momento relativístico} \end{cases}$

Notemos também que p^μ é um quadrivetor temporal (negligenciando é claro a partícula luminosa - fóton), veja:

$$\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = p^\mu p_\mu = -(\gamma m_o c)^2 + (\gamma m_o v)^2 = -\gamma^2 m_o^2 (c^2 - v^2) = -\cancel{\gamma^2} m_o^2 c^2 \cancel{(1-\beta^2)}$$

$$p^\mu p_\mu = -m_o^2 c^2 = \text{constante negativa (Quantidade invariante!)}$$

Para ficar numa forma mais canônica (didática)

$$p^\mu p_\mu = -m_o^2 c^2 = -\frac{E^2}{c^2} + p^2 \leftrightarrow \frac{E^2}{c^2} = m_o^2 c^2 + p^2 \leftrightarrow E^2 = m_o^2 c^4 + p^2 c^2$$

$$E^2 = m_o^2 c^4 \left(1 + \frac{p^2}{m_o^2 c^2}\right) \longleftrightarrow \boxed{E = m_o c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_o^2 c^2}}}$$, energia relativística.

* Lembremos também que essa energia relativística é composta pela energia de repouso $E_o = m_o c^2 = \text{cte}$ e uma componente proporcional à velocidade v, a energia cinética K.

Então $E = E_o + K \leftrightarrow K = E - E_o = \gamma m_o c^2 - m_o c^2 = m_o c^2 (\gamma - 1)$

$$\boxed{K = m_o c^2 (\gamma - 1)}$$, Se $v \to 0$, $\beta \to 0$, $\gamma \to 1$ e $K \to 0$
Se $v \to c$, $\beta \to 1$, $\gamma \to \infty$ e $K \to \infty$ *

* Portanto nenhuma partícula com massa pode atingir a velocidade da luz. Seria necessário uma energia infinita!

Um caso à parte são as partículas sem massa, como é o caso do fóton (partícula luminosa). Neste caso o intervalo/tamanho de seu quadrimomento é nulo (tipo temporal) $\boxed{\eta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = 0}$ //

Mas o fóton carrega energia e momento, então $p^\mu = (E/c, \vec{p})$

$$p^\mu p_\mu = 0 = -\frac{E^2}{c^2} + p^2 \leftrightarrow \frac{E^2}{c^2} = p^2 \leftrightarrow \boxed{E = p.c}$$

Em quântica $p = \hbar k = \frac{\hbar 2\pi}{\lambda}$, então

$$E = \frac{\hbar 2\pi}{\lambda} . c = \frac{\hbar 2\pi \cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda} f} = \hbar \frac{2\pi}{f} \leftrightarrow \boxed{E = \hbar\omega}$$