9.5 ↦ Forças entre referenciais inerciais

Quando medimos um certo fenômeno físico em um referencial, como a força resultante sob essa partícula, o resultado da intensidade dessa força é diferente. Mas lembre-se que as leis da física continuam válidas entre os referenciais (algum tipo de interação fundamental é o último responsável por esse efeito). Vamos tomar como exemplo a medida de uma força em um referencial agindo sob uma partícula de massa de repouso m_0. Consideremos também um referencial (F) do laboratório (repouso) e um observador (F') que se move p/ direita com velocidade $\vec{v}$.

Do ponto de vista de ambos os referenciais a força resultante sob a mesma partícula segue a 2ª lei de Newton:

$$f = \frac{dP}{dt} \quad (\text{Referencial } F) \quad , \quad f' = \frac{dP'}{dt'} \quad (\text{Referencial } F')$$

↳ Por ironia do destino (só que não!) já sabemos calcular as transformações de coordenadas (quadrivetores $x^\mu \to x'^\mu$) e do momento relativístico (quadrimomento $P^\mu \to P'^\mu$)

Então temos: $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(-\beta ct + x) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} cdt' &= \gamma(cdt - \beta dx) \\ dx' &= \gamma(-\beta cdt + dx) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \end{aligned}$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↳ Boost na direção x

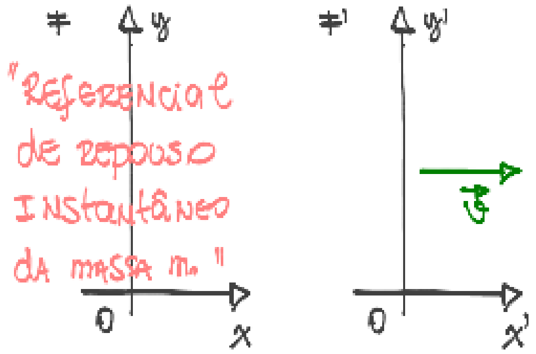
A mesma transformação é aplicada ao quadrimomento P^μ

$P'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu \longleftrightarrow$

$P^\mu = (\frac{E}{c}, P^x, P^y, P^z)$

$$\begin{aligned} P'^0 &= \gamma P^0 - \beta\gamma P^1 \\ P'^1 &= -\gamma\beta P^0 + \gamma P^1 \\ P'^2 &= P^2 \\ P'^3 &= P^3 \end{aligned} \longleftrightarrow \begin{aligned} E'/c &= \gamma(E/c - \beta P^x) \\ P'^x &= \gamma(-\beta E/c + P^x) \\ P'^y &= P^y \\ P'^z &= P^z \end{aligned} \longleftrightarrow \begin{aligned} dE'/c &= \gamma(dE/c - \beta dP_x) \\ dP'_x &= \gamma(-\beta dE/c + dP_x) \\ dP'_y &= dP_y \\ dP'_z &= dP_z \end{aligned}$$

Onde escrevi ao fim $P^i = P_i$ para ficar mais familiar e também porque tanto as componentes contravariantes P^i como covariantes P_i são iguais/possuem o mesmo valor absoluto (nessa métrica do espaçotempo).



$m_0 \longrightarrow (\vec{f}_x, \vec{f'}_x)$

* Consideremos que alguma interação física resulte numa força sob a partícula na direção x.

Então temos num certo intervalo de tempo dt as seguintes variações instantâneas no referencial F.

m_0 •- - - - - -• → f_x , O referencial F' observa f'_x onde $\boxed{f'_x = \dfrac{dP'_x}{dt'}}$

$dx,\ dP_x,\ dE,\ dt$

Portanto:

$$f_x = \frac{dP_x}{dt} = m_0 \frac{d^2x}{dt^2} = m_0 a_x, \quad \boxed{dP_x = f_x dt}$$

$$a_x = \frac{f_x}{m_0}, \quad \boxed{dx = \frac{1}{2}\frac{f_x}{m}(dt)^2}$$

$$dv = \frac{f_x}{m_0}(dt)$$

$$dE = \frac{1}{2}m(dv)^2 = \frac{1}{2}\cancel{m_0}\frac{f_x^2}{m_0^{\cancel{2}}}dt^2$$

$$\boxed{dE = \frac{(f_x dt)^2}{2m_0}}$$

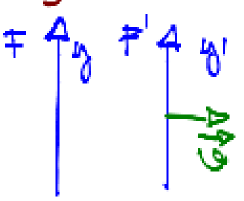
$$f'_x = \frac{dP'_x}{dt'} = \frac{\cancel{\gamma}(-\beta dE/c + dP_x)}{\cancel{\gamma}(dt - \beta\, dx/c)},$$

$$f'_x = \frac{-\dfrac{\beta}{c}\dfrac{(f_x dt)^2}{2m_0} + f_x dt}{dt - \dfrac{\beta}{c}\dfrac{1}{2}\dfrac{f_x(dt)^2}{m_0}}$$

$$f'_x = \frac{f_x dt\left(1 - \cancel{\dfrac{\beta f_x dt}{2cm_0}}\right)}{dt\left(1 - \cancel{\dfrac{\beta f_x dt}{2cm_0}}\right)} = \frac{f_x dt}{dt} = f_x$$

$$\boxed{f'_x = f_x} \ //$$

⇒ Depois de um trabalhinho descobrimos que a componente da força na direção do boost não se altera! Mas e na direção ortogonal?



$\uparrow f_y$
m_0

REF (F) ↦ $f_y = \dfrac{dP_y}{dt}$ ⟷ $\boxed{dP_y = f_y dt}$

REF (F') ↦ $f'_y = \dfrac{dP'_y}{dt'}$, $c\,dt' = \gamma(c\,dt - \cancel{\beta\,dx})$

$\boxed{dt' = \gamma\, dt}$

Não há movimento de m_0 em x

Então temos:

$$f'_y = \frac{dP'_y}{dt'} = \frac{dP_y}{\gamma\, dt} = \frac{f_y}{\gamma} \longleftrightarrow \boxed{f'_y = \frac{f_y}{\gamma}}$$

Note portanto que a componente ortogonal ao boost é alterada por um fator γ. Ficamos com:

$$\vec{f}_{/\!/} = \frac{\vec{f}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v}, \quad \vec{f}_{\perp} = \vec{f} - \vec{f}_{/\!/}$$

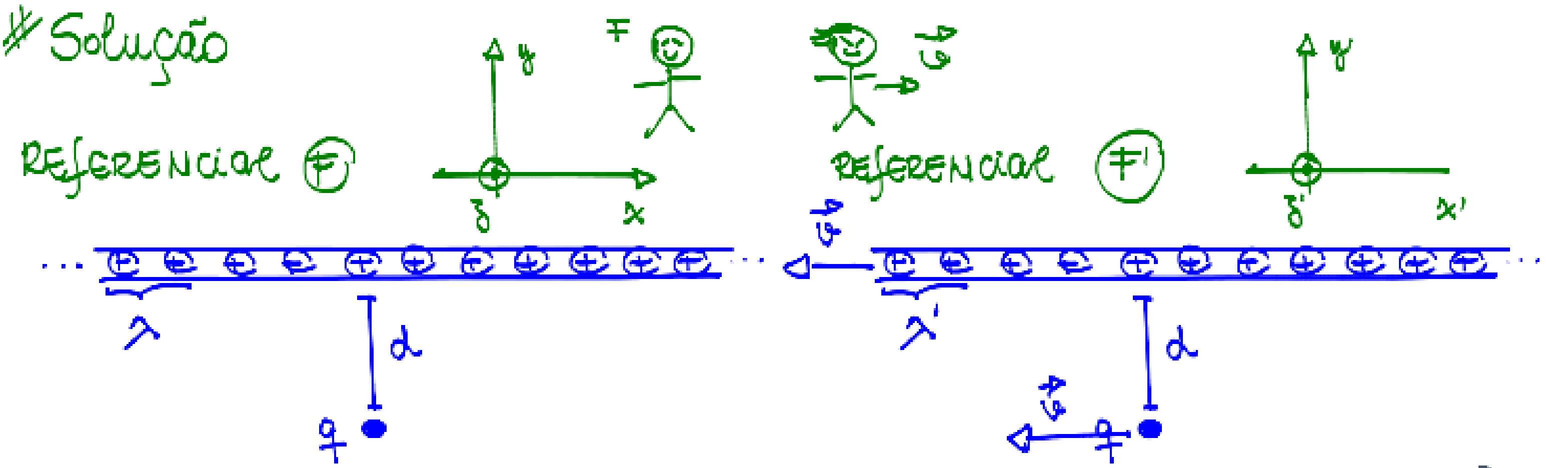
$$\boxed{\vec{f'}_{/\!/} = \vec{f}_{/\!/}}, \quad \boxed{\vec{f'}_{\perp} = \frac{\vec{f}_{\perp}}{\gamma}}, \quad \vec{f} = \vec{f}_{/\!/} + \vec{f}_{\perp}$$

$$\vec{f'} = \vec{f'}_{/\!/} + \vec{f'}_{\perp}$$

Exemplo: Considere um referencial (F) onde estão em repouso uma carga pontual q e uma haste unidimensional carregada com densidade linear de carga λ, separadas por uma distância d. Um observador se move para direita com velocidade $\vec{v}$ esse é o referencial (F'). No referencial de (F') tanto a carga (q) quanto o fio com densidade de carga λ se movem para esquerda com velocidade $\vec{v}$. Encontre a força resultante que atua sob a carga no referencial (F'). Calcule de três maneiras; listadas abaixo.

1. Pela transformação relativística da força entre ref. inerciais.
2. Calculando diretamente $\vec{E}'$ e $\vec{B}'$ no novo referencial pela trans. formação das fontes.
3. Pela transformação relativísticas dos campos $(\vec{E},\vec{B}) \mapsto (\vec{E}',\vec{B}')$

Solução



(1) No referencial (F) age sob a carga (q) uma força elétrica $\vec{f}_e$

$$\vec{f}_e = q\cdot\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}(-\hat{z}) \Leftrightarrow \vec{f}_e = -\frac{q\,\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}(\hat{z})$$

q • ↓ $\vec{f}_e$

O referencial (F') de medir $f' = \dfrac{f}{\gamma}$ portanto.

$$\boxed{\vec{f}' = \frac{1}{\gamma}\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}(-\hat{z})} \quad \text{onde} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(2) No referencial (F') surge fonte de campo elétrico (λ') e uma corrente I p/ esquerda de intensidade $\boxed{I = \lambda' v}$, (verify!)

Pela Lei de Gauss $\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \dfrac{q_{in}}{\varepsilon_0}$, $\vec{E}' = -\dfrac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 d}\hat{z} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}' = -\dfrac{\gamma\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\hat{z}}$

Lembre-se que a densidade linear de carga se dilata por um fator γ quando comparada c/ o valor no seu referencial de repouso F. $\boxed{\lambda' = \gamma\lambda}$, devido à contração espacial na direção do boost.

A corrente resulta no aparecimento de um campo magnético em F' que pode ser encontrado pela lei de Ampére.

$$\oint \vec{B}'\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in} \leftrightarrow B'\, 2\pi d = \mu_0 \lambda' v = \mu_0 \gamma\lambda v \leftrightarrow \boxed{\vec{B}' = \frac{\mu_0 \gamma \lambda v}{2\pi d}(+\hat{k})}$$

Força resultante é a própria força de Lorentz no ref F'

$$\vec{f}' = q(\vec{E}' + \vec{v}\times\vec{B}') = q\left[\left(-\frac{\gamma\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\hat{j}\right) + v(-\hat{i})\times\frac{\mu_0\gamma\lambda v}{2\pi d}(+\hat{k})\right]$$

$$\vec{f}' = -\frac{q\lambda\gamma}{2\pi\varepsilon_0 d}\hat{j} + \frac{q v^2 \mu_0 \gamma\lambda}{2\pi d}\hat{j}$$

$$\vec{f}' = -\frac{q\lambda\hat{j}}{\gamma\, 2\pi\varepsilon_0 d}\left(\gamma^2 - v^2\varepsilon_0\gamma^2\mu_0\right) = -\frac{q\lambda\hat{j}}{\gamma\, 2\pi\varepsilon_0 d}\left(\gamma^2 - \frac{v^2}{c^2}\gamma^2\right)$$

$$\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = \frac{1}{(1-\beta^2)}(1-\beta^2) = 1$$

Portanto:

$$\boxed{\vec{f}' = -\frac{1}{\gamma}\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\hat{j}}$$

(3) Mostre que a transformação relativística resulta na mesma força! (todos os caminhos levam a Roma).

↳ Façam em casa com calma e a resposta é que sim! dá o mesmo resultado.

* Com isso chegamos ao final dessa temporada especial sobre Relatividade Restrita! ↔ Não é um assunto trivial; mas que merece nossa total atenção como físicos. De certa forma é nossa responsabilidade compreender suas nuances e pincelar seu formalismo.

Fim