7.5.2 → Fator de Qualidade Q do circuito RLC + fonte a.c

⇒ Potência média dissipada possui a seguinte dependência com a frequência ω da fonte

$$P_{média}(\omega) = \frac{R\,\xi_{rms}^2}{R^2 + (X_C - X_L)^2} = \frac{R\,\xi_{rms}^2}{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \frac{R\,\xi_{rms}^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

→ $\omega = \omega_0 \leftrightarrow$ Potência máxima

$$\boxed{P_{média}^{máx} = \frac{\xi_{rms}^2}{R}}$$

Note que os valores de ω para os quais a potência média é a metade da máxima $\frac{\xi_{rms}^2}{2R}$ ocorre quando $\boxed{\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| = R}$

Lembrando que definimos o valor de $\Delta\omega$ a meia altura da $P_{méd}$.

Assim temos que $\frac{P_{méd}^{máx}}{2}$ ocorre para $\omega = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ ou $= \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$

Neste caso quanto vale $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$? Veja abaixo:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L + \frac{\Delta\omega L}{2} - \frac{1}{\omega_0 C + \frac{\Delta\omega}{2} C} = \omega_0 L\left(1 + \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}\right) - \frac{1}{\omega_0 C\left(1 + \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}\right)}$$

Lembre também que já definimos o fator de qualidade $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$

$$\omega_0 L\left(1 + \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}\right) - \frac{\omega_0 L}{\cancel{\omega_0^2 LC}\left(1 + \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}\right)} = \omega_0 L\left(1 + \frac{\Delta\omega}{2\omega_0} - \frac{1}{1 + \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}}\right)$$

Veja que $\frac{\Delta\omega}{2\omega_0} \ll 1$, podemos expandir em série de taylor

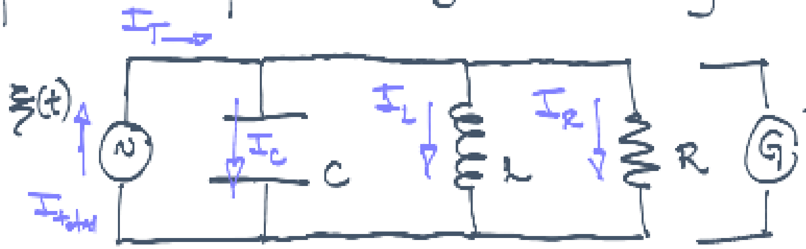
$$\frac{1}{1 + \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}} = 1 - \frac{\Delta\omega}{2\omega_0} \dots \Leftrightarrow \omega_0 L\left(1 + \frac{\Delta\omega}{2\omega_0} - 1 + \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}\right) = \omega_0 L\left(\frac{\cancel{2}\Delta\omega}{\cancel{2}\omega_0}\right)$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \omega_0 L \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = R \Leftrightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{\omega_0 L}{R}}$$

⇒ $Q = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \leftrightarrow \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$, parâmetros que alteram o fator.

7.6 → Circuito RLC + fonte a.c em paralelo

→ Vamos agora quebrar um paradigma e analisar o circuito em paralelo pelo diagrama de fasores.



→ Note que toda diferença de potencial em cada elemento do circuito é a mesma. Mas a corrente não!

$\xi(t) = \xi_{pico}\cos(\omega t)$, fonte a.c. com frequência ω, a mesma para todos os elementos $V_R(t) = V_C(t) = V_L(t) = \xi_{pico}\cos(\omega t)$.

□ Já sabemos as relações de fase entre as correntes $I_R(t)$, $I_L(t)$ e $I_C(t)$ e as respectivas d.d.ps então temos:

$V_R(t) = V_C(t) = V_L(t) = \xi_{pico}\cos(\omega t)$

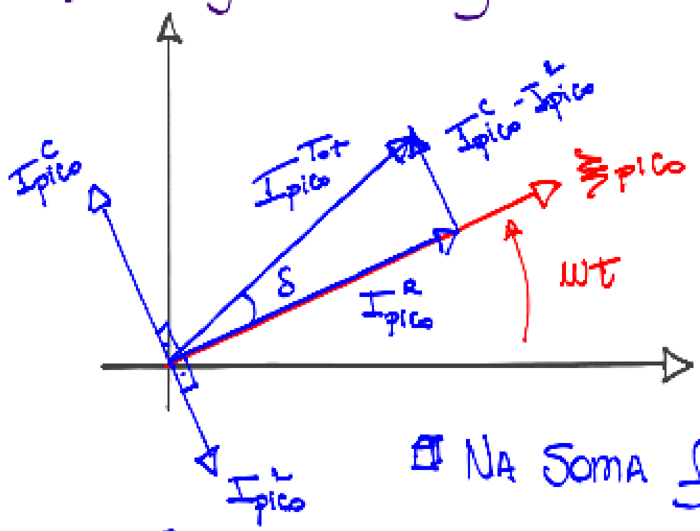
Corrente na resistência em fase c/ fonte $I_R(t) = I^R_{pico}\cos(\omega t)$

Corrente no indutor atrasado $\pi/2$ ↔ $I_L(t) = I^L_{pico}\cos(\omega t - \pi/2)$

" " capacitor adiantado $\pi/2$ ↔ $I_C(t) = I^C_{pico}\cos(\omega t + \pi/2)$

" na fonte ↔ $I_T(t) = I^{Tot}_{pico}\cos(\omega t + \delta)$.

* No diagrama de fasores temos:



⇒ Em cada elemento temos:

- $I^R_{pico} = \dfrac{\xi_{pico}}{R}$
- $I^C_{pico} = \dfrac{\xi_{pico}}{X_C}$
- $I^L_{pico} = \dfrac{\xi_{pico}}{X_L}$

$$I^{Tot}_{pico} = \frac{\xi_{pico}}{Z}$$

□ Na soma fasorial de corrente:

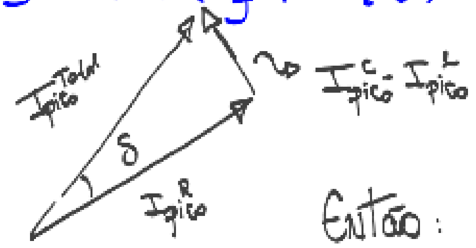
$$(I^{Tot}_{pico})^2 = (I^R_{pico})^2 + (I^C_{pico} - I^L_{pico})^2$$

$$\left(\frac{\cancel{\xi_{pico}}}{Z}\right)^2 = \frac{\cancel{\xi^2_{pico}}}{R^2} + \left(\frac{\cancel{\xi_{pico}}}{X_C} - \frac{\cancel{\xi_{pico}}}{X_L}\right)^2$$

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2 \leftrightarrow \boxed{\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}}$$

* Impedância do circuito RLC em paralelo

⇒ Diferença de fase δ entre a corrente $I_{Total}(t)$ na fonte e a f.e.m da fonte $\xi(t)$.



⇒ $$tg\,\delta = \frac{CO}{CA} = \frac{I^{C}_{pico} - I^{L}_{pico}}{I^{R}_{pico}} = \frac{\frac{\xi_{pico}}{X_C} - \frac{\xi_{pico}}{X_L}}{\frac{\xi_{pico}}{R}}$$

Então: $$tg\,\delta = R\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right) = R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \frac{RC}{\omega}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)$$

Assim ⇔ $$\boxed{\delta = \operatorname{arctg}\left(\frac{RC}{\omega}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\right)}$$

⇒ As soluções ficam:

$$I_{Total}(t) = \frac{\xi_{pico}}{Z(\omega)}\cos\left[\omega t + \operatorname{arctg}\left\{\frac{RC}{\omega}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\right\}\right], \quad \frac{1}{Z(\omega)} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}$$

$$I_R(t) = \frac{\xi_{pico}}{R}\cos(\omega t), \quad I_L(t) = \frac{\xi_{pico}}{X_L}\cos(\omega t - \pi/2), \quad I_C(t) = \frac{\xi_{pico}}{X_C}\cos(\omega t + \pi/2)$$

* Somente a resistência dissipa energia, então a potência média dissipada pelo circuito é:

$$\langle P(t)\rangle = \langle R I_R^2(t)\rangle = R\langle I_R^2(t)\rangle = R\left\langle \frac{\xi_{pico}^2}{R^2}\cos^2(\omega t)\right\rangle = \frac{\xi_{pico}^2}{R}\langle\cos^2(\omega t)\rangle$$

$$\langle P(t)\rangle = \frac{\xi_{pico}^2}{R}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\xi_{rms}^2}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\langle P(t)\rangle = \frac{\xi_{rms}^2}{R}}$$ //

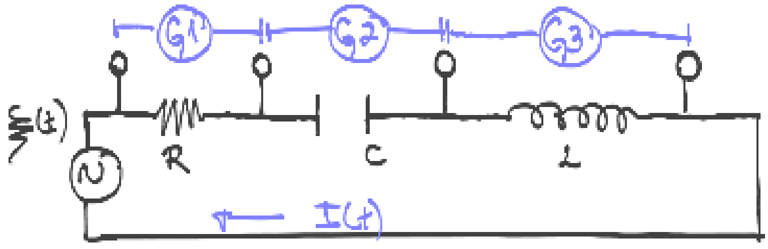
$$I^{Total}_{pico} = \frac{\xi_{pico}}{Z} \rightarrow \frac{I^{Tot}_{pico}}{\sqrt{2}} = \frac{\xi_{pico}}{\sqrt{2}Z} = I_{rms} = \frac{\xi_{rms}}{Z} \Leftrightarrow \boxed{\langle P(t)\rangle = \frac{I_{rms}^2}{Z^2 \cdot R}}$$ equivalente

Pergunta!!! (Responda em casa!)

⇒ O que acontece com as correntes e as quedas de potencial no circuito quando a frequência da fonte (ω) é igual à frequência normal de osilação $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, ou seja, analise os resultados acima quando $\omega = \omega_0$.

⇒ Voltemos agora ao circuito RLC + fonte a.c. em série e discutiremos seu uso como filtros de sinal.

7.7 → Filtros de sinal num circuito RLC



(G1) ↦ $V_R(t) \to I_{rms} \cdot R = \dfrac{\xi_{rms}}{Z} \cdot R$

(G2) ↦ $V_C(t) \to I_{rms} \cdot X_C = \dfrac{\xi_{rms}}{Z} X_C$

(G3) ↦ $V_L(t) \to I_{rms} X_L = \dfrac{\xi_{rms}}{Z} \cdot X_L$

* No circuito em série

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \frac{L^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2)^2} = \text{Impedância}$$

Então as medidas realizadas nos galvanômetros são proporcionais à ξ_{rms}, mas variam com a frequência da fonte (ω).

$$MG1 = \frac{R}{Z(\omega)} \cdot \xi_{rms} = \alpha_1 \xi_{rms} \longleftrightarrow \alpha_1 = \frac{R}{Z(\omega)}$$

$$MG2 = \frac{X_C}{Z} \cdot \xi_{rms} = \alpha_2 \xi_{rms} \longleftrightarrow \alpha_2 = \frac{X_C(\omega)}{Z(\omega)}$$

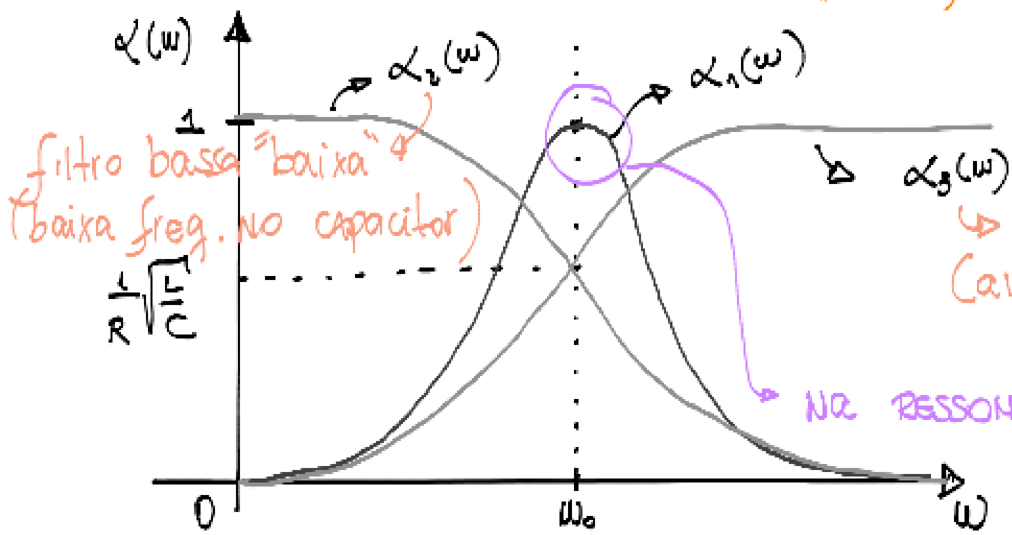
$$MG3 = \frac{X_L}{Z} \cdot \xi_{rms} = \alpha_3 \xi_{rms} \longleftrightarrow \alpha_3 = \frac{X_L(\omega)}{Z(\omega)}$$

* Note que de forma geral a intensidade do sinal (d.d.p) medido pelos equipamentos dependem da frequência ω. Onde os fatores $\alpha_1(\omega)$, $\alpha_2(\omega)$ e $\alpha_3(\omega)$.

□ Podemos reescrever α_1, α_2 e α_3 como:

$$\alpha_1(\omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{L^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2)^2}}, \quad \alpha_2(\omega) = \frac{1}{\omega C \sqrt{R^2 + \frac{L^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2)^2}}, \quad \alpha_3(\omega) = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \frac{L^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2)^2}}$$

Onde na ressonância $\omega = \omega_0 \longleftrightarrow \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ e $\alpha_3 = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$



↳ filtro passa "Alta" (alta frequência no indutor)

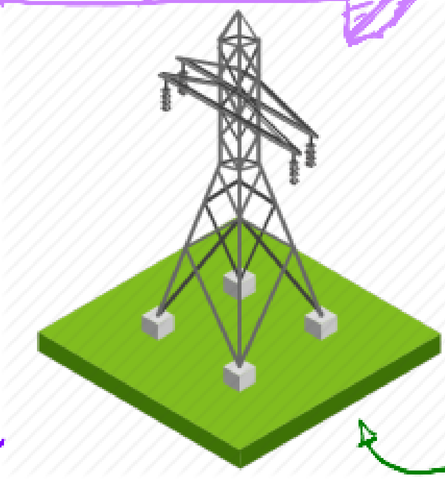
Na ressonância a maior amplitude é medida sob a resistência

7.8 → Transformadores

Geração de energia elétrica (usinas)

Linhas de transmissão

Utilização doméstica e industrial



↳ Segurança no consumo

▫ Potência produzida

$P_{méd} = \mathcal{E}_{rms} I_{rms}$

↳ Segurança na produção

▫ Potência consumida

$P_{méd} = \mathcal{E}_{rms} I_{rms}$

▫ Potência dissipada na transmissão $P_{diss} = R I_{rms}^2$

* Possuimos então uma certa flexibilidade ao produzir/consumir uma mesma quantidade de potência, contanto que o produto $\mathcal{E}_{rms} I_{rms}$ permaneça inalterado. Contudo, o manuseio de baixas tensões é mais seguro! já que a chance da quebra da rigidez dielétrica do ar ou curto circuitos/choques elétricos é reduzida.

▫ Porém, na transmissão quanto mais alta a "tensão" melhor, já que significa menor corrente (rms) no sistema reduzindo as perdas nas linhas de transmissão, onde a potência dissipada é diretamente proporcional à I_{rms}^2.

* Considere o seguinte exemplo - da produção/transmissão/consumo

Usina de prod. elétrica

$400\,MW = 400 \times 10^6 W$

$\mathcal{E}^0_{rms} = 20\,kV$

$I^0_{rms} = 20\,kA$

⇒ Transmissão

$\mathcal{E}^+_{rms} = 800\,kV$

$I_{rms} = 500\,A$

Linha: 1000 km

$R = 0{,}25\,\Omega \cdot km^{-1}$

⇒ Perdas ôhmicas

$P_{diss} = R I_{rms}^2$

$= 250(500)^2$

$P_{dis} = 62{,}50\,MW$

⇒ $\frac{62{,}50}{400} = \frac{15{,}6}{100}$

15,6% perdidos

⇒ transmissão

$\mathcal{E}^+_{rms} = 400\,kV$

$I_{rms} = 1000\,A$

(Na mesma linha de transmissão)

⇒ Perdas ôhmicas

$P_{diss} = R I_{rms}^2$

$= 250(1000)^2$

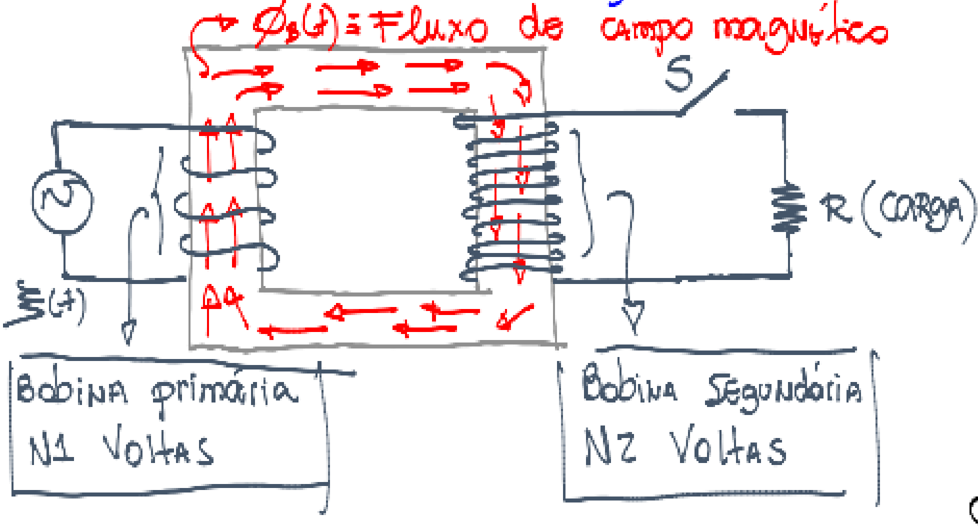
$P_{diss} = 250\,MW$

⇒ $\frac{250}{400} = \frac{62{,}5}{100}$ → 62,5% perdidos

Transformadores aumentam ou abaixam tensões/correntes

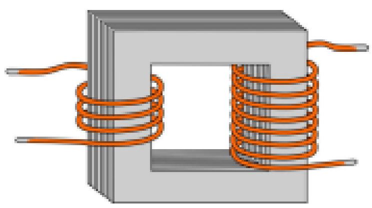
→ No caso da rede elétrica o transformador é usando para aumentar a tensão/diminuir a corrente entre a usina e a linha de transmissão, e outro, entre a linha e os consumidores finais. Estudemos os princípios físicos básicos que governam o funcionamento de transformadores.

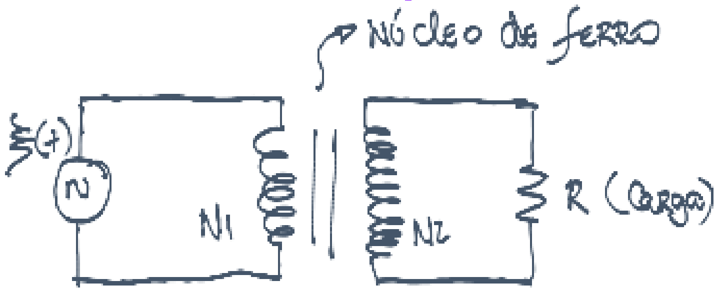
Estrutura de um transformador



* Quando a chave (S) é fechada corrente flui pela bobina primária $I_1(t)$ criando uma variação do fluxo magnético $\phi_B(t)$ confinado no volume de um material ferroso com boa permeabilidade magnética. A variação do fluxo na segunda bobina cria uma d.d.p V_2 e corrente I_2 que é consumida pela carga resistiva (R) (luz, motor, geladeira, fogão, etc.). Há então uma combinação da Lei de Faraday, Lei de Lenz e um material com alta permeabilidade magnética (ferro mole, ferro doce). Note que as bobinas primária e secundárias são totalmente reversíveis ou intercambiáveis

Representação diagramática do transformador





(transformador)

⇨ Numa primeira aproximação desprezemos perdas ohmicas nos fios e que toda linha de campo magnético é confinada no bloco de ferro mole, ou seja, que o fluxo ϕ_B para cada volta das espiras seja o mesmo, assim temos:

primário $\quad \mathcal{E}_1 = -N_1 \dfrac{d\phi_B^1}{dt}$

secundário $\quad \mathcal{E}_2 = -N_2 \dfrac{d\phi_B^2}{dt}$

Se $\phi_B^1 = \phi_B^2 = \phi_B$

$$\frac{d\phi_B^1}{dt} = \frac{d\phi_B^2}{dt} = \frac{d\phi_B}{dt} \Rightarrow \frac{\mathcal{E}_1}{N_1} = \frac{\mathcal{E}_2}{N_2} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{N_1}{N_2}}$$