Solução da EDO

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{LC}Q(t) = 0 \leftrightarrow \ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + w_0^2 Q = 0$$

Equação característica $\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + w_0^2 = 0$

Raízes $\lambda = \frac{-R}{2L} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - 4.w_0^2} = \frac{-R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - w_0^2}$

Caso 1 → fortemente amortecido/supercrítico

$\frac{R^2}{4L^2} - w_0^2 > 0 \leftrightarrow R^2 > 4w_0^2L^2 \leftrightarrow R > 2w_0L \leftrightarrow \boxed{R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$

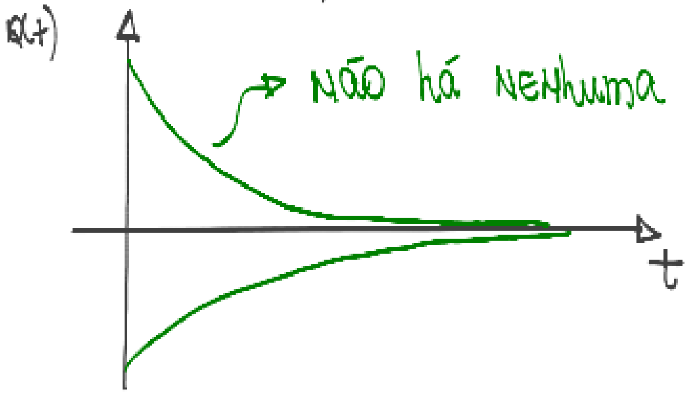
Lembrando que $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ = frequência natural/característica

Então neste caso temos: $\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - w_0^2} = -\alpha \pm \beta$

Solução geral $Q(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

$Q(t) = C_1 e^{(-\alpha+\beta)t} + C_2 e^{(-\alpha-\beta)t}$, decaimento exponencial

C_1 e C_2 dependem das condições iniciais $Q(0) = Q_0$
$I(0) = 0$.

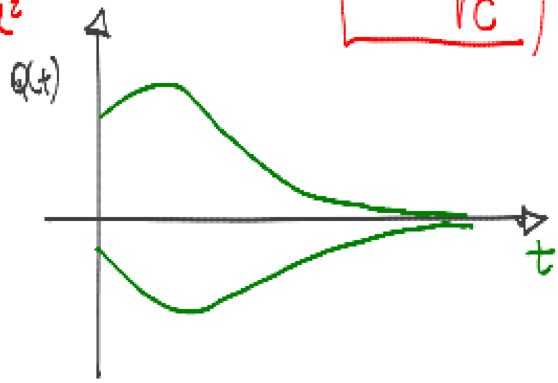


não há nenhuma oscilação no sistema

Caso 2 → amortecimento crítico $\frac{R^2}{4L^2} - w_0^2 = 0 \leftrightarrow \boxed{R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$

Solução com raiz única $\boxed{\lambda = -\alpha}$

Solução Geral da EDO $Q(t) = e^{-\alpha t}(C_1 + C_2 t)$



Sem comportamento oscilatório com no máximo um "overshooting"

Se $R < 2w_0L$ começam a aparecer oscilações!

Caso ③ → amortecimento fraco / Subcrítico
fracamente amortecido

$$\frac{R^2}{4L^2} - \omega_0^2 < 0 \Leftrightarrow R^2 < 4\omega_0^2 L^2 \Leftrightarrow R < 2\omega_0 L \Leftrightarrow \boxed{R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

As raízes da equação característica são complexas.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \omega_0^2} = -\alpha \pm \beta i \,, \quad \boxed{\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}}} \,//$$

Assim a solução geral é da forma:

$$Q(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-\alpha t} \cdot e^{i\beta t} + C_2 e^{-\alpha t} \cdot e^{-i\beta t} = e^{-\alpha t}(C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t})$$

$$\operatorname{Sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \,, \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\boxed{Q(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \delta)}$$

→ Solução oscilatória modulada por um decaimento exponencial

Condições iniciais $Q(0) = Q_0$, $I(0) = 0$

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -A\alpha e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \delta) - A\beta e^{-\alpha t} \operatorname{Sen}(\beta t + \delta)$$

$$I(0) = 0 = -A\alpha \cos\delta - A\beta \operatorname{Sen}\delta = 0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{Sen}\delta}{\cos\delta} = -\frac{\alpha}{\beta} = \boxed{\operatorname{tg}\delta = -\frac{\alpha}{\beta}}$$

$\delta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)$, fase

$$Q(0) = A\cos(\delta) = Q_0 \Leftrightarrow \boxed{A = \frac{Q_0}{\cos\delta}} \,//$$

Assim temos as seguintes soluções:

$$\boxed{Q(t) = \frac{Q_0}{\cos\delta} \cos(\beta t + \delta)} \,, \quad I(t) = -A e^{-\alpha t} \beta \left[\operatorname{Sen}(\beta t + \delta) + \frac{\alpha}{\beta}\cos(\beta t + \delta)\right]$$

$$\boxed{I(t) = -\frac{Q_0 \beta}{\cos\delta} e^{-\alpha t}\left[\operatorname{Sen}(\beta t + \delta) + \frac{\alpha}{\beta}\cos(\beta t + \delta)\right]} \,//$$

Q(t) = carga no capacitor
I(t) = corrente elétrica que flui no circuito todo!

⇒ Potência dissipada em cada elemento do circuito RLC sem fonte.

→ Pela lei das malhas tinhamos

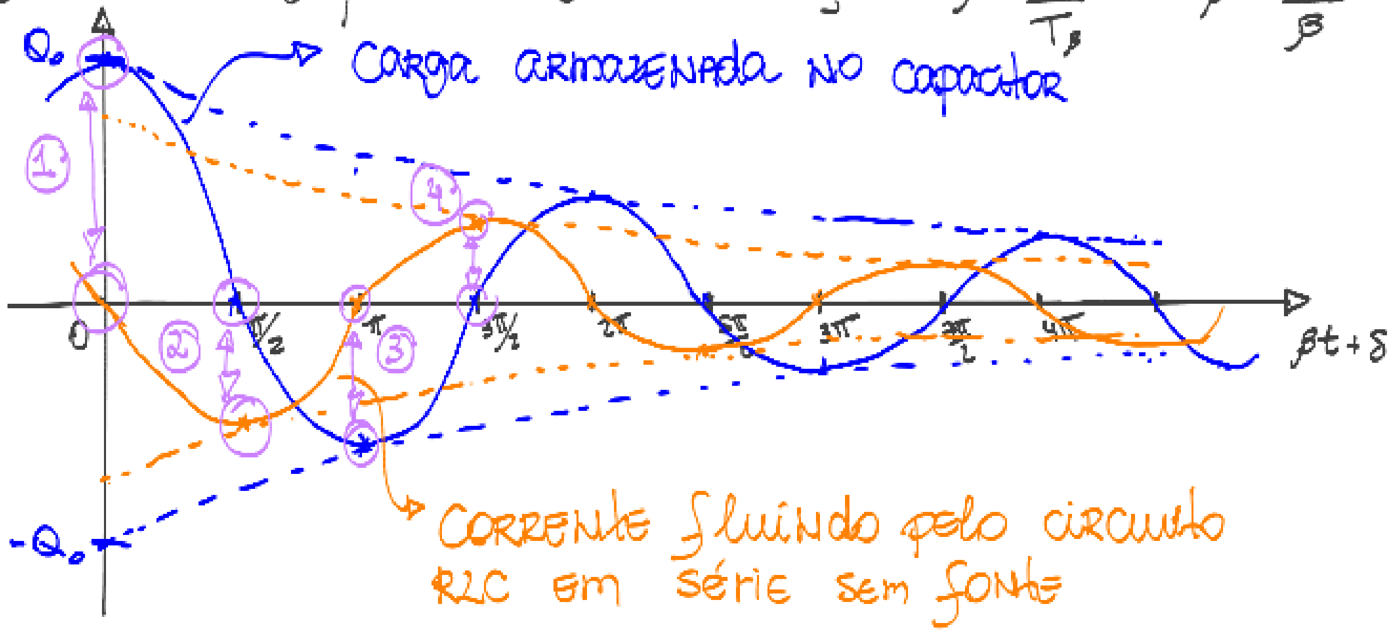
→ potência dissipada na resistência

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = 0 \quad \times I(t) \Leftrightarrow LI(t)\frac{dI(t)}{dt} + RI^2(t) + \frac{Q(t)I(t)}{C} = 0$$

$U_C = \frac{Q^2}{2C}$, $\frac{dU_C}{dt} = \frac{2Q\,dQ}{2C\,dt} = \frac{QI}{C}$, potência instantânea no capacitor

$U_L = \frac{LI^2}{2}$, $\frac{dU_L}{dt} = \frac{L}{2}\,2I\frac{dI}{dt} = LI(t)\frac{dI(t)}{dt}$, pot. instant. no indutor

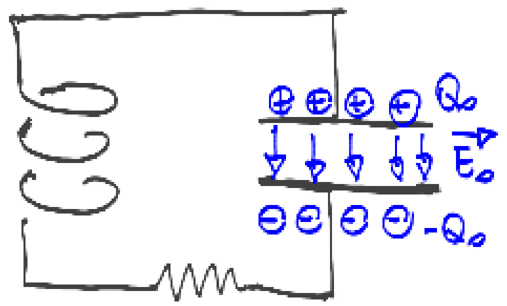
* O processo não conserva energia que é dissipada pelo resistor a cada período de oscilação $\beta = \frac{2\pi}{T_\beta} \rightarrow T_\beta = \frac{2\pi}{\beta}$.



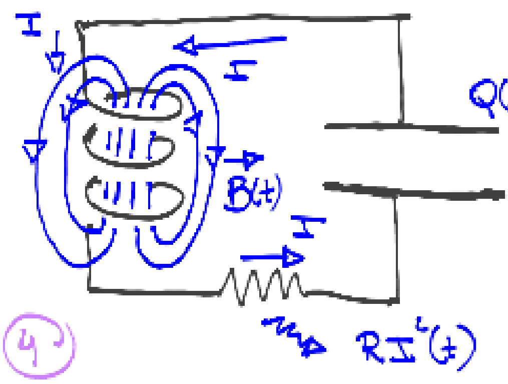
tempo ① $\beta t+\delta=0$

$I=0$

$Q(0)=Q_0$



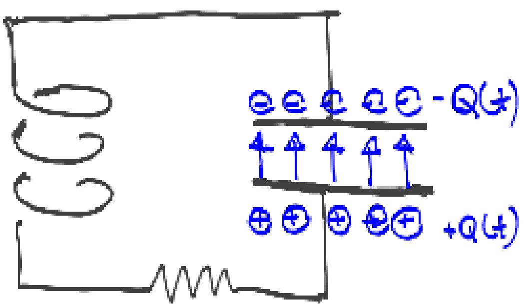
tempo ② $\beta t+\delta=\pi/2$



tempo ③ $\beta t+\delta=\pi$

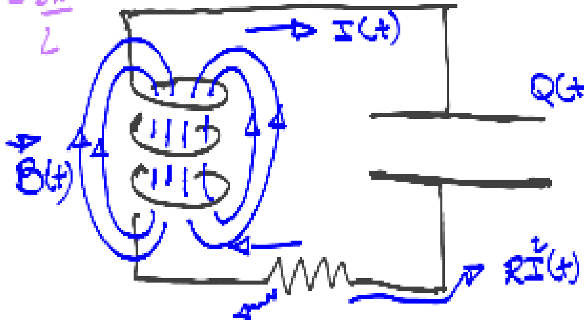
$I=0$

$Q_t<Q_0$



tempo ④

$\beta t+\delta=\frac{3\pi}{2}$



⇒ Fator de qualidade Q (Circuito RLC)

→ Definições

① $Q = \omega \dfrac{\text{energia armazenada}}{\text{Potência média dissipada}}$, $[Q] = \dfrac{rad}{\cancel{s}} \cdot \dfrac{\cancel{J}}{\cancel{J}} \cancel{s}$ = radianos

→ nosso circuito $\omega = \beta$

② Q ≡ Número de radianos do argumento (βt) $[\beta t = 2\pi f]$ necessário para que a energia/potência do oscilador diminua por um fator $1/e$. → $(1/e \approx 0{,}37)$

\# Energia armazenada no circuito é $\propto I^2(t)$

$$I(t) = -\frac{Q_0 \beta}{\cos\delta} e^{-\alpha t} [\text{parte oscilatória } (\beta t)]$$

então

$$I^2(t) = \left(\frac{Q_0\beta}{\cos\delta}\right)^2 e^{-2\alpha t} [\text{parte oscilatória } (\beta t)]^2$$

Qual o tempo t_Q que caracteriza o fator de qualidade Q?

$$I^2(t_Q) = \left(\cancel{\frac{Q_0\beta}{\cos\delta}}\right)^2 e^{-2\alpha t_Q} = \frac{1}{e}\left(\cancel{\frac{Q_0\beta}{\cos\delta}}\right)^2$$

(Negligenciando a parte oscilatória!)

$$e^{-2\alpha t_Q} = e^{-1} \Leftrightarrow 2\alpha t_Q = 1 \Leftrightarrow \boxed{t_Q = \frac{1}{2\alpha}} \quad , \quad \alpha = \frac{R}{2L}$$

$$t_Q = \frac{1}{2R} 2L = \frac{L}{R} \quad , \quad \boxed{t_Q = \frac{L}{R}}$$

$$Q = \beta t_Q = \frac{\beta L}{R} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{\beta L}{R}} \quad , \quad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

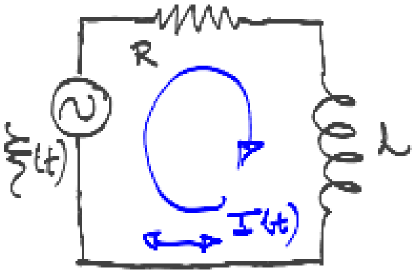
β ≡ oscilação do circuito

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ → frequência de oscilação normal/característica.

* Caso especial para R pequeno. Q é alto.

Q muito alto $\beta \to \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, e o circuito passa a oscilar próxima à frequência natural e "demora" bastante a "morrer".

7.3 → Análise do circuito RL + fonte a.c



$\xi(t) = \xi_{pico}\cos(\omega t)$, ω = frequência ang. da fonte

$$\xi(t) - RI(t) - V_L(t) = 0$$

$$V_L(t) + RI(t) = \xi(t)$$

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = \xi(t) = \xi_{pico}\cos(\omega t) \quad \text{, equação 1}$$

No estado estacionário a solução deve ser oscilatória, um bom Ansatz é $I(t) = I_{pico}\cos(\omega t + \delta)$ //

Quanto vale I_{pico} e δ? Usando o Ansatz na eq. 1 temos.

$$-L\omega I_{pico}\,\mathrm{Sen}(\omega t + \delta) + R I_{pico}\cos(\omega t + \delta) = \xi_{pico}\cos(\omega t)$$

$$-L\omega I_{pico}[\mathrm{Sen}\,\omega t\cos\delta + \mathrm{Sen}\,\delta\cos\omega t] + RI_{pico}[\cos\omega t\cos\delta - \mathrm{Sen}\,\omega t\,\mathrm{Sen}\,\delta] = \xi_{pico}\cos\omega t$$

$$\cos\omega t[-L\omega I_{pico}\,\mathrm{Sen}\,\delta + RI_{pico}\cos\delta] = \xi_{pico}\cos\omega t) \quad (1)$$

$$\mathrm{Sen}\,\omega t\underbrace{[-L\omega I_{pico}\cos\delta - RI_{pico}\,\mathrm{Sen}\,\delta]}_{=0} = 0.\mathrm{Sen}(\omega t) \quad (2)$$

(Comparação da equação acima)

$$(2) \leftrightarrow R\cancel{I_{pico}}\,\mathrm{Sen}\,\delta = -L\omega\cancel{I_{pico}}\cos\delta$$

$$\frac{\mathrm{Sen}\,\delta}{\cos\delta} = -\frac{L\omega}{R} = \mathrm{tg}\,\delta \leftrightarrow \boxed{\mathrm{tg}\,\delta = -\frac{L\omega}{R}}, \quad \boxed{\delta = \mathrm{arctg}\left(-\frac{L\omega}{R}\right)} \;//$$

$$(1) \leftrightarrow -L\omega I_{pico}\,\mathrm{Sen}\,\delta + RI_{pico}\cos\delta = \xi_{pico}$$

$$I_{pico}\left(-\frac{\mathrm{Sen}\,\delta}{\cos\delta} + \frac{R}{L\omega}\right) = \frac{\xi_{pico}}{L\omega\cos\delta} = I_{pico}\left(-\mathrm{tg}\,\delta + \frac{R}{L\omega}\right) = \frac{\xi_{pico}}{L\omega\cos\delta}$$

$$\frac{\cos^2\delta}{\cos^2\delta} + \frac{\mathrm{Sen}^2\delta}{\cos^2\delta} = \frac{1}{\cos^2\delta} \rightarrow 1 + \mathrm{tg}^2\delta = \frac{1}{\cos^2\delta} = 1 + \frac{L^2\omega^2}{R^2} = \frac{1}{\cos^2\delta} = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{R^2}$$

$$\cos\delta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

$$I_{pico}\left(+\frac{\omega L}{R} + \frac{R}{\omega L}\right) = I_{pico}\frac{(+\omega^2 L^2 + R^2)}{\omega L R}$$

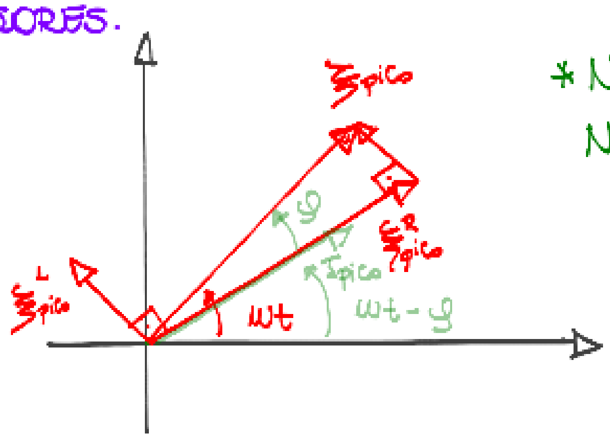
$$I_{pico} = \frac{\xi_{pico}\,\cancel{\omega L R}}{\frac{\cancel{L\omega R}}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}.(R^2 + X_L^2)} = \boxed{I_{pico} = \frac{\xi_{pico}}{(R^2 + X_L^2)^{1/2}}} \;//$$

Finalmente podemos encontrar a corrente no circuito.

$$I(t) = \frac{\xi_{pico}}{(R^2 + X_L^2)^{1/2}}.\cos\left(\omega t + \mathrm{arctg}\left(-\frac{\omega L}{R}\right)\right) \;//$$

E a d.d.p no indutor vale $V_L(t) = L\frac{dI}{dt}$ | $V_R(t) = RI(t)$

* Vamos realizar a análise gráfica com o diagrama de fasores.



* Na Resistência $V_R(t) = RI(t)$, em fase c/ corrente
No Indutor $V_L(t) = L\dfrac{dI}{dt}$, dif. fase $90°$ ($\pi/2$)

* Comecemos graficando a corrente $I(t)$ que é a mesma em todo o circuito.

$I(t) = I_{pico}\cos(\omega t - \varphi)$, $\xi^2_{pico} = (\xi^R_{pico})^2 + (\xi^L_{pico})^2$

$$\xi^2_{pico} = I^2_{pico}R^2 + I^2_{pico}X_L^2$$

$$I^2_{pico}Z^2 = I^2_{pico}R^2 + I^2_{pico}X_L^2$$

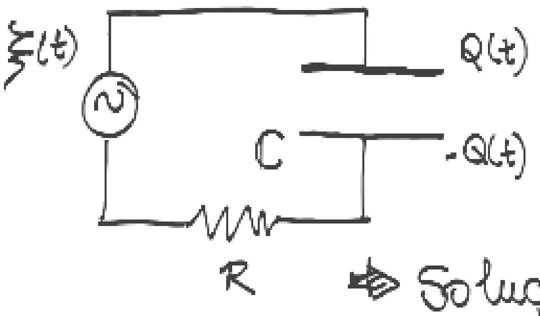
$Z^2 = R^2 + X_L^2 \leftrightarrow Z = (R^2 + X_L^2)^{1/2}$ = Impedância , $I_{pico} = \dfrac{\xi_{pico}}{Z}$

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\xi^L_{pico}}{\xi^R_{pico}} = \dfrac{I_{pico}X_L}{I_{pico}R} = \dfrac{X_L}{R} = \dfrac{\omega L}{R}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\omega L}{R}\right)$

$$-\varphi = -\operatorname{arctg}(\omega L/R)$$

$$\delta = \operatorname{arctg}(-\omega L/R)$$

7.4 → Análise de circuito RC + fonte a.c



$\xi(t) - RI(t) - \dfrac{Q(t)}{C} = 0$

$RI(t) + \dfrac{Q(t)}{C} = \xi(t) \leftrightarrow R\dfrac{dQ(t)}{dt} + \dfrac{1}{C}Q(t) = \xi(t)$

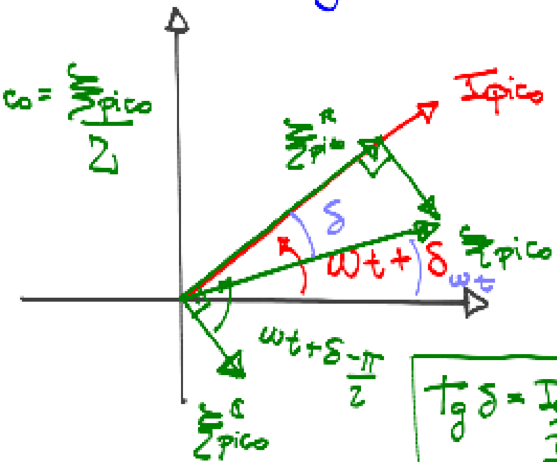
⇒ Solução é a mesma de um oscilador harmônico forçado onde $Q(t) = A\cos(\omega t + \delta)$ ou $I(t) = A\cos(\omega t + \delta)$ //

Análise do Diagrama de fasores

$I(t) = I_{pico}\cos(\omega t + \delta)$

A corrente no capacitor é adiantada $\pi/2$ c/ relação à $V_C(t) = \xi^C_{pico}\cos(\omega t + \delta - \frac{\pi}{2})$

$I_{pico} = \dfrac{\xi_{pico}}{Z}$



$$\xi^2_{pico} = (\xi^R_{pico}) + (\xi^C_{pico})^2$$

$$(I_{pico}Z)^2 = (I_{pico}R)^2 + (I_{pico}X_C)^2$$

$$\boxed{Z^2 = R^2 + X_C^2}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\delta = \frac{I_{pico}X_C}{I_{pico}R} = \frac{1}{\omega CR}}$$

$$\boxed{I(t) = \frac{\xi_{pico}}{\sqrt{R^2 + X_C}}\cos\left(\omega t + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega CR}\right)\right)}$$