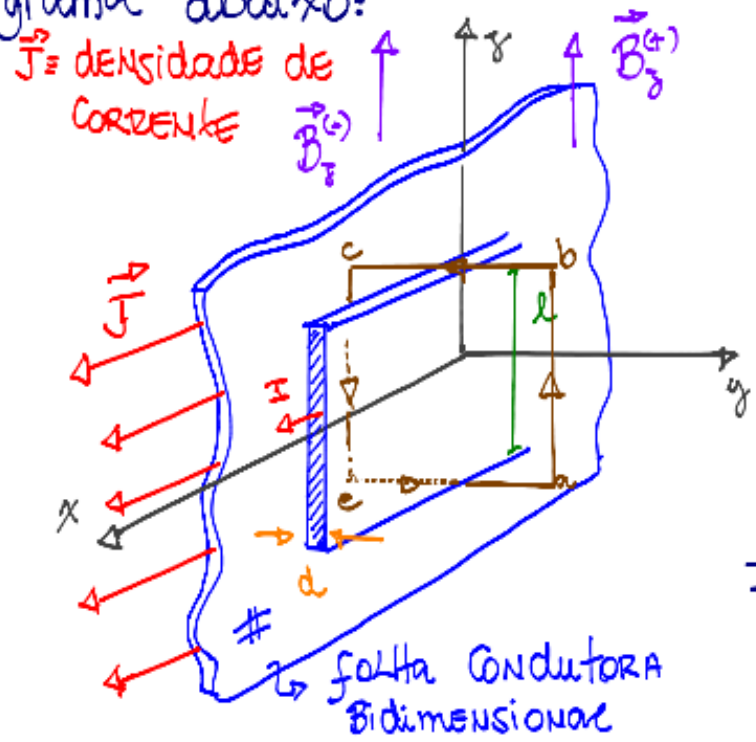


* VAMOS NOVAMENTE UTILIZAR UM EXPERIMENTO MENTAL PARA ENCONTRAR A LEI DE TRANSFORMAÇÃO RELATIVÍSTICA PARA O CAMPO MAGNÉTICO \vec{B} ENTRE REFERENCIAIS INERCIAIS. Talvez um ponto importante a se constatar ao sinal dessas notas é que o próprio campo \vec{B} nasce de um fenômeno relativístico. O que é campo \vec{E} num dado referencial se torna \vec{B} em outro. Veja que essa conclusão não é de toda nova, já que a própria interação de uma carga q com campo \vec{B} só ocorre se houver um movimento "relativo" entre eles (força magnética $\vec{f}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$).

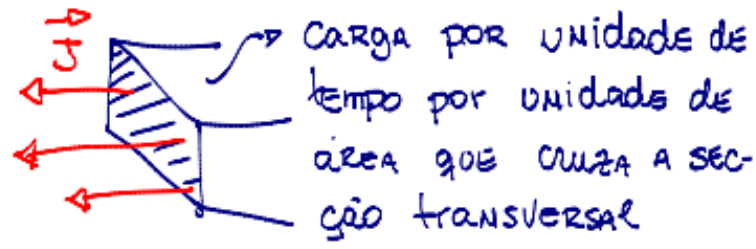
Compreender esse nosso próximo Gedanken Experiment não é tarefa tão simples com nossas ferramentas atuais, para isso façamos um pouco de preparo para facilitar a nossa vida. (E para que ninguém fique muito maluco ao final da demonstração).

⇔ Preparação: Campo magnético criado por densidade de corrente \vec{J} que flui por uma folha condutora bidimensional, como no diagrama abaixo:



Densidade de corrente no condutor

$$[\vec{J}] = \frac{A}{m^2} = \frac{C}{m^2 \cdot s}$$



$$I = \int_{\text{ÁREA}} \vec{J} \cdot d\vec{a} = J \int da = JA$$

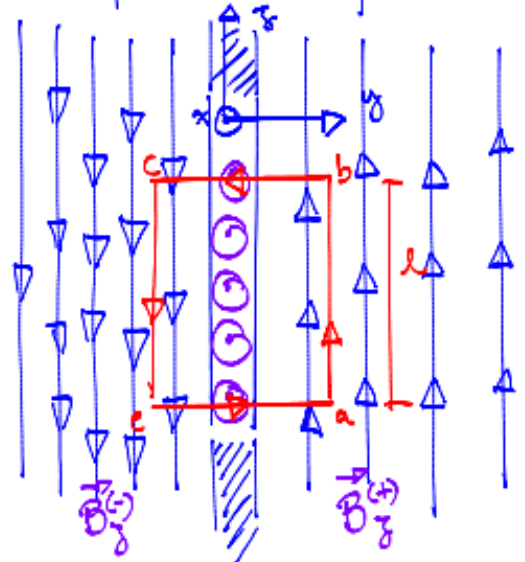
↳ constante e paralela à $d\vec{a}$

$$I = JA$$

No diagrama acima I é a corrente na área $l \cdot d$ onde:
 $I = J l d = \frac{J d l}{1} = J l$, $[J] = \frac{A}{m}$ (sheet current density)

* Agora podemos utilizar a lei de Ampère para encontrar o campo \vec{B} criado pela corrente que flui pela folha condutora.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in}$$



$\oint_{abce} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} = \mu_0 J l$
 por simetria / seguindo a Regra da mão direita no sentido da integração temos:

$$B_y^{(+)} l + B_y^{(-)} l = \mu_0 J l = 2 B l = \mu_0 J l$$

$$\Rightarrow B_y^{(+)} = B_y^{(-)} = B$$

$$B = \frac{\mu_0 J}{2}$$

$$\vec{B}_y^{(-)} = \frac{\mu_0 J}{2} (-\hat{k})$$

$$\vec{B}_y^{(+)} = \frac{\mu_0 J}{2} (+\hat{k})$$

* Descontinuidade ao cruzar a placa

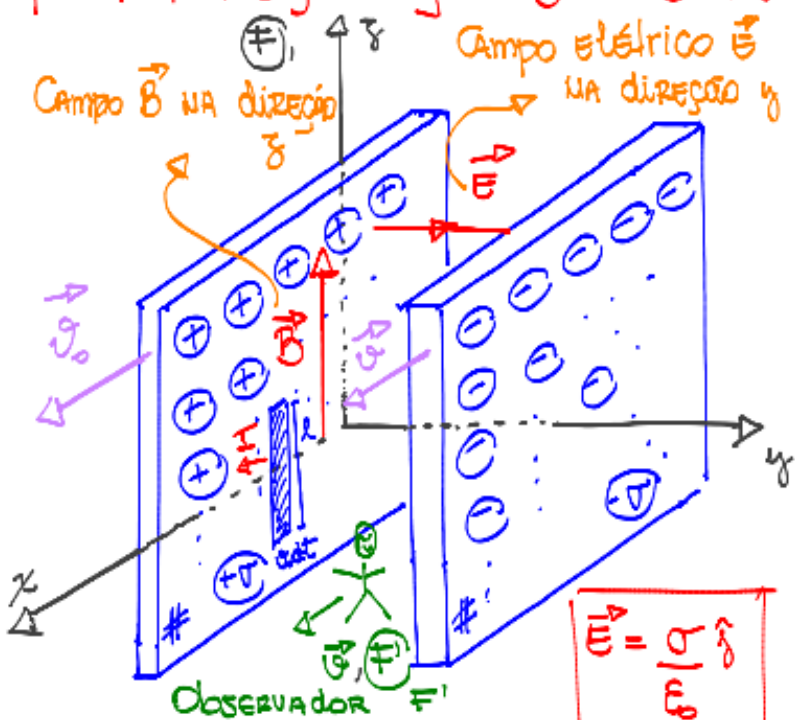
$$\Delta B = \mu_0 J$$

O mesmo ocorre com o campo elétrico nos dois lados de uma placa infinita.

$$\Delta E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

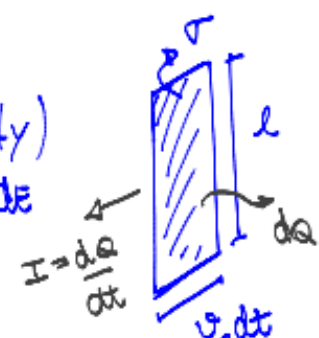
9.4.1 → "GEDANKEN EXPERIMENT" PARA TRANSFORMAÇÃO $\vec{B} \rightarrow \vec{B}'$ NUM "boost" DE LORENTZ.

* CONSIDEREMOS DUAS PLACAS (∞) CONDUTORAS SEPARADAS POR UMA DISTÂNCIA d , PARALELAS AO PLANO (x,z) NUM REFERENCIAL F. ESSAS PLACAS POSSUEM NESTE REFERENCIAL UMA DENSIDADE SUPERFICIAL DE CARGA σ E VELOCIDADE \vec{v}_0 NA DIREÇÃO DE x POSITIVO.



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y}$$

(Sheet current density) DENSIDADE LINEAR DE CORRENTE J



$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d(\sigma v_0 l dt)}{dt} = \sigma v_0 l$$

$$I = \sigma v_0 l = \sigma l v_0 = J l \Leftrightarrow \boxed{J = \sigma v_0}$$

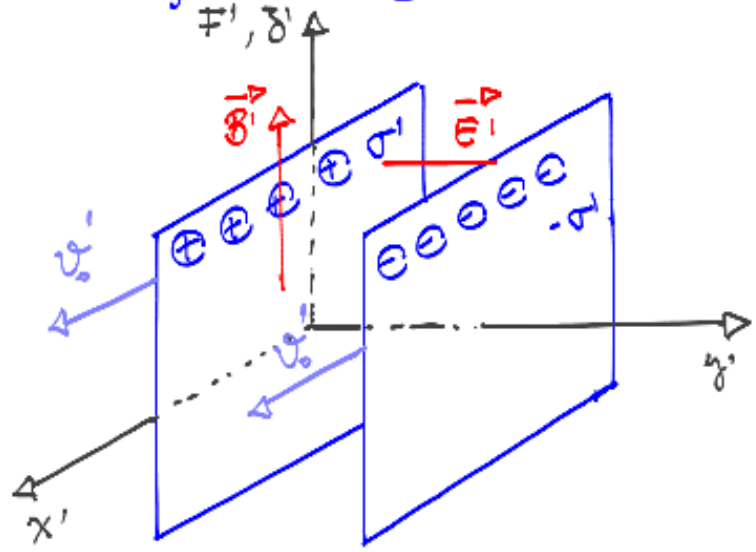
$$[\sigma v_0] = \frac{C}{m^2} \cdot \frac{m}{s} = \frac{C}{m \cdot s} = A = [J]$$

Assim o campo magnético criado NO INTERIOR das duas placas é devido à J^+ e J^- onde:

$$\vec{B} = \mu_0 J \hat{k} \Leftrightarrow \boxed{\vec{B}_z = \mu_0 \sigma v_0 \hat{k}}$$

⇒ Como um observador (F) que se move com velocidade cons. na direção de x, observa/mede esses mesmos campos na região entre as duas placas.

* No referencial (F') temos:



* Tudo se resume agora com a maneira com a qual as fontes dos campos se transformam!
 $\sigma, j \mapsto \sigma', j'$

* Densidade superficial própria de carga σ_0 (referencial de repouso das cargas)

$$\beta_0 = \frac{v_0}{c}$$

$$\sigma = \gamma_0 \sigma_0$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\gamma_0}, \gamma_0 = \frac{1}{(1 - \beta_0^2)^{1/2}}$$

Soma de velocidades relativísticas para o boost em x.

$$v' = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \iff \sigma_0' = \frac{\sigma_0 - \sigma}{1 - \frac{v_0 \sigma}{c^2}} \iff \frac{\sigma_0'}{c} = \frac{\sigma_0/c - \sigma/c}{1 - \frac{v_0 \sigma}{c^2}} \iff \beta_0' = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta}$$

* A densidade superficial de carga σ' sofre um aumento por um factor γ' com relação a σ_0 . Então $\sigma' = \gamma' \sigma_0$ onde:

$$\gamma' = \frac{1}{(1 - \beta_0'^2)^{1/2}} = \frac{1}{\left[1 - \frac{(\beta_0 - \beta)^2}{(1 - \beta_0 \beta)^2}\right]^{1/2}} = \frac{(1 - \beta_0 \beta)}{[1 - \beta^2 - \beta_0^2(1 - \beta^2)]^{1/2}} = \frac{(1 - \beta_0 \beta)}{[(1 - \beta^2)(1 - \beta_0^2)]^{1/2}}$$

$$\boxed{\gamma' = \gamma \gamma_0 (1 - \beta_0 \beta)}$$

Assim σ' no referencial (F') vale:

$$\sigma' = \gamma' \sigma_0 = \gamma' \frac{\sigma}{\gamma_0} = \gamma \cancel{\gamma_0} (1 - \beta_0 \beta) \frac{\sigma}{\cancel{\gamma_0}} = \gamma \sigma (1 - \beta_0 \beta) \iff \boxed{\sigma' = \gamma \sigma (1 - \beta_0 \beta)}$$

E a densidade linear de corrente J (Density sheet current) em F' vale:

$$J' = \sigma' v' = \gamma \sigma (1 - \beta_0 \beta) c \frac{(\beta_0 - \beta)}{(1 - \beta_0 \beta)} \iff \boxed{J' = \gamma \sigma c (\beta_0 - \beta)}$$

$\sigma' = \gamma \sigma (1 - \beta_0 \beta) \Rightarrow$ FONTE de Campo Elétrico \vec{E}'
 $J' = \gamma \sigma c (\beta_0 - \beta) \Rightarrow$ FONTE de Campo Magnético \vec{B}'

Campo Elétrico E'_y NO NOVO REFERENCIAL

$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\gamma \sigma (1 - \beta_0 \beta)}{\epsilon_0} = \gamma \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\gamma \sigma \beta_0 \beta}{\epsilon_0} = \gamma \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\gamma \sigma v_0 \beta}{\cancel{\epsilon_0} c^2} \mu_0$

$E'_y = \gamma \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} - v \mu_0 \sigma_0 \right) \Leftrightarrow \begin{cases} E'_y = \gamma (E_y - v B_z) \\ E'_y = \gamma (E_y - \beta c B_z) \end{cases}$

Campo magnético B'_z NO REFERENCIAL F'

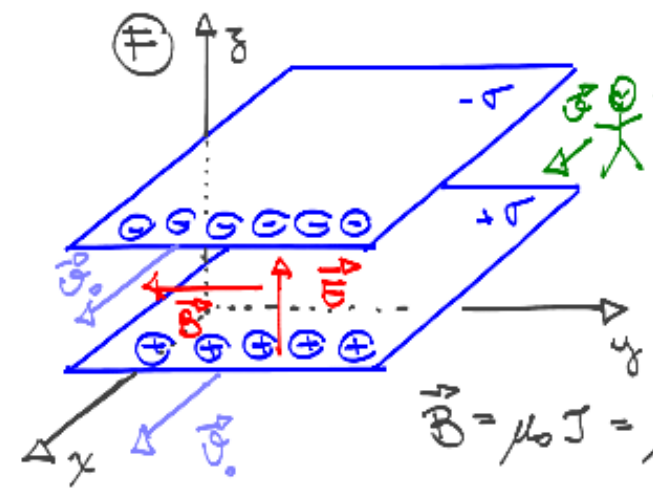
$B'_z = \mu_0 J = \mu_0 \gamma \sigma c (\beta_0 - \beta) = \mu_0 \gamma \sigma v_0 - \mu_0 \gamma \sigma c \frac{v}{c}$, lembrando que $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$
 $B'_z = \gamma \mu_0 \sigma v_0 - \frac{1}{c^2} \gamma \sigma v = \gamma \mu_0 \sigma v_0 - \gamma \frac{\beta \sigma}{c \epsilon_0}$

$B'_z = \gamma E_z - \gamma \beta \frac{E_y}{c} \Leftrightarrow c B'_z = \gamma (c B_z - \beta E_y)$

* FICAMOS ENTÃO COM:

$$\begin{cases} E'_y = \gamma (E_y + \beta c B_z) \\ c B'_z = \gamma (c B_z - \beta E_y) \end{cases}$$

⇒ REFAÇAMOS AGORA O MESMO "GEDANKEN EXPERIMENT" MAS COLOQUEMOS AS PLACAS PARALELAS AO PLANO x,y DESTA VEZ.



OBSERVADOR (F')
 ⇔ NOTE QUE ESTE É UM CASO SEME-
 LHANTE ONDES:

$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k} \Leftrightarrow \begin{cases} E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{cases}$

$\vec{B} = \mu_0 J = \mu_0 \sigma v_0 (-\hat{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} B_y = -\mu_0 \sigma v_0 \end{cases}$

* REFAÇA AS CONTAS CUIDADOSAMENTE NO SEU LAR (MAS VEJA QUE

por comparação com o resultado anterior o resultado pg 232 deve ser o que se segue:) Confira e mostre que errei em algo.

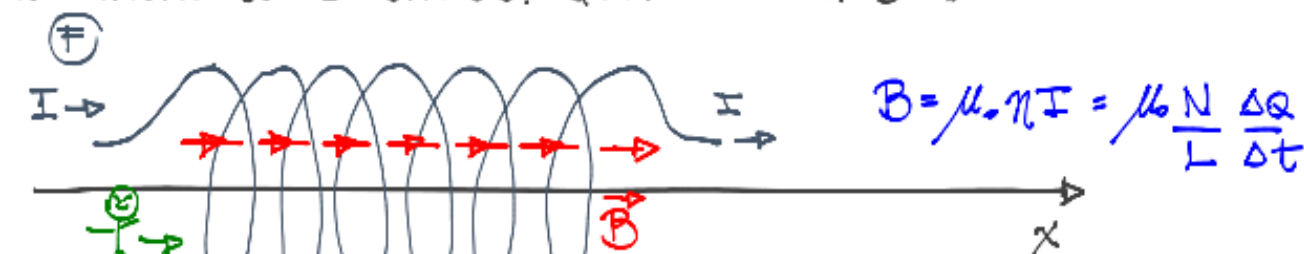
$$\boxed{E'_z = \gamma(E_z + \beta c B_y)} \quad , \quad \boxed{c B'_y = \gamma(c B_y + \beta E_z)}$$

Já dá para notar que a transformação de Lorentz acaba misturando componentes dos campos elétrico \vec{E} (E_x, E_y, E_z) e magnético \vec{B} (B_x, B_y, B_z) entre os referenciais inerciais \mathcal{F} e \mathcal{F}' . Falta ainda discutir como a componente paralela ao boost se transforma.

* Relaxa que essa demonstração é fácil! Só precisamos de mais um experimento mental!

* Lembra-se que já verificamos que no caso do campo elétrico \vec{E} a componente paralela ao boost não se modifica $\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}$.

⇒ Gedanken Experiment: Um solenóide com corrente I , densidade linear de voltas η cria um campo magnético $\vec{B} = \mu_0 \eta I \hat{z}$ a longo do eixo x . Um observador \mathcal{F}' viaja v velocidade $\vec{v} = v \hat{x}$ direita no meio do solenóide. Quanto será \vec{B}' ?



$$B = \mu_0 \eta I = \mu_0 \frac{N}{L} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Solenóide em repouso no referencial \mathcal{F}

* Assim no referencial \mathcal{F}' o campo vale:

$$B' = \mu_0 \frac{N}{L'} \frac{\Delta Q}{\Delta t'} = \mu_0 \frac{N}{L} \frac{\Delta Q}{\gamma \Delta t}$$

Para o observador \mathcal{F}' , duas coisas mudam radicalmente!

$$L' = \frac{L}{\gamma} \text{ (contração espacial)}$$

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \text{ (dilatação temporal)}$$

$$\boxed{B' = \mu_0 \eta I = B}$$

$$\boxed{B'_{\parallel} = B_{\parallel}}$$

Assim como o campo elétrico \vec{E} a componente de \vec{B} paralela ao boost (B'_{\parallel}) também não se altera.

* Portanto, se um boost ocorre na direção x temos:

$$\left. \begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - \beta c B_z), & E'_z &= \gamma(E_z + \beta c B_y) \\ B'_x &= B_x, & c B'_y &= \gamma(c B_y + \beta E_z), & c B'_z &= \gamma(c B_z - \beta E_y) \end{aligned} \right\} \text{ Calma que podemos melhorar essa salada!}$$

Podemos sempre decompor os campos (\vec{E}, \vec{B}) NA direção paralela e ortogonal ao boost. De modo que:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} \\ \vec{B} &= \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp} \end{aligned} \iff \begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E}'_{\parallel} + \vec{E}'_{\perp} \\ \vec{B}' &= \vec{B}'_{\parallel} + \vec{B}'_{\perp} \end{aligned} \iff \boxed{\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} \end{aligned}}, \quad \begin{aligned} \vec{E}'_{\perp} &= \gamma (\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \wedge c \vec{B}_{\perp}) \\ c \vec{B}'_{\perp} &= \gamma (c \vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \wedge \vec{E}_{\perp}) \end{aligned}$$

Claramente o campo eletromagnético não se transforma da mesma maneira que um quadrivetor χ^{μ} , mas como um tensor de RANK 2 o chamado tensor do campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$. (Vamos defini-lo por diversão)

$F_{\mu\nu} = (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu})$ ONDE $A^{\mu} = \eta^{\mu\beta} A_{\beta} \equiv \epsilon'$ o quadripotencial
 $A^{\mu} \equiv (\phi/c, A^i)$ } $\phi \equiv$ POTENCIAL ESCALAR
 $A^i \equiv$ POTENCIAL VETOR \vec{A}

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \iff F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

* CONSIDERANDO UM BOOST NA DIREÇÃO DE X O BOOST DE LORENTZ É:

$$\Delta^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} & * \text{AS TRANSFORMAÇÕES SÃO:} \\ & \boxed{\chi'^{\mu} = \Delta^{\mu}_{\nu} \chi^{\nu}} \quad \text{quadrivetores} \\ & \boxed{F'^{\mu\nu} = \Delta^{\mu}_{\alpha} \Delta^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta}} \quad \text{tensor de RANK 2} \end{aligned}$$

Podemos então escrever a forma covariante das equações de Maxwell. ONDE:

Equações com fontes * $\text{ONDE } J^{\nu} \equiv (c\rho, j^i)$
 quadricorrente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \iff \boxed{\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \mu_0 J^{\nu}}$$

Equações sem fontes * $\text{IDENTIDADE DE BIANCHI}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \iff \boxed{\partial_{\alpha} F_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} F_{\gamma\alpha} + \partial_{\gamma} F_{\alpha\beta} = \partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0}$$