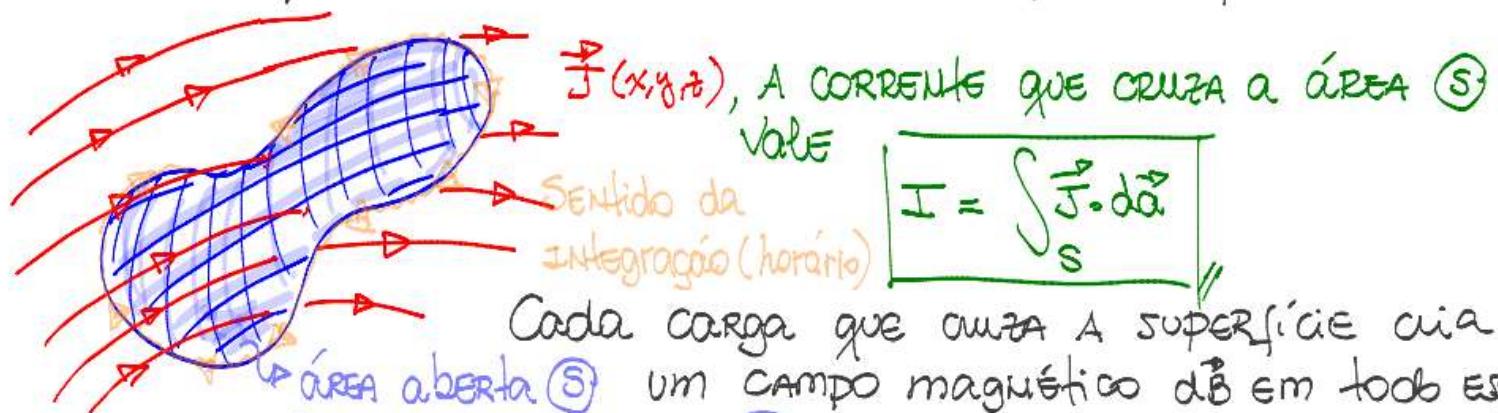


Portanto, numa região do espaço onde exista um campo vetorial  $\vec{J}$  independentes do tempo, podemos afirmar que: pg 122



Cada carga que cruza a superfície cria uma área aberta S um campo magnético d $\vec{B}$  em todo espaço com borda fechada S. Portanto essa distribuição de corrente  $\vec{J}$  cria um campo  $\vec{B}$  em todo espaço. A lei de Ampére resulta em:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot da$$

Assim, a generalização da lei de Ampére na forma integral é

$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot da = \int_S \mu_0 \vec{J} \cdot da = \iint_S \mu_0 \vec{J} \cdot da$$

Utilizando o teorema de Stokes que discutimos nas aulas passadas onde:

$$\int_S \vec{F} \cdot da = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot da, \text{ reescrevemos a lei de Ampére como:}$$

$$\int_S \vec{B} \cdot da = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot da = \int_S \mu_0 \vec{J} \cdot da, \text{ também, do resultado do teorema acima, a integral de linha na borda } \partial S \text{ independe da forma da área } S \text{ que é arbitrária, e o resultado acima só é válido se:}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

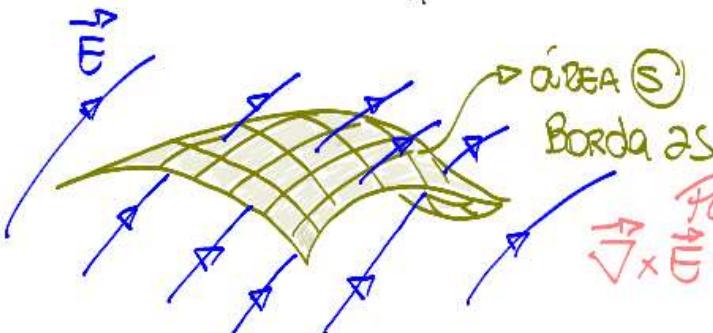
Essa é a lei de Ampére na forma diferencial, e é válida p/ todo ponto  $(x, y, z)$  formando uma das quatro equações de Maxwell do Eletromagnetismo.

### 5.9 → O potencial vetor $\vec{A}$

Vimos que no caso do campo  $\vec{E}$  existe uma quantidade escalar que descreve o campo em todo espaço, o potencial escalar  $\phi(r)$ .

$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{p(r') da'}{|r - r'|}$ , associado ao trabalho realizado pelo campo  $\vec{E}$  por unidade eletrostática.

Notemos também que numa região onde há campo elétrico, pg 123



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{E} = \int (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = 0, \text{ Campo conservativo}$$

Para ser válido em todo espaço então  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ , (na eletrostática!)  
CONVENÇÃO

Se  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ , então posso escrever  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ , pois o rotacional de todo gradiente é sempre nulo veja: ( $\epsilon_{ijk} \equiv \text{Levi-Civita}$ )

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{E})^i &= \epsilon_{ijk} \partial_j E^k \\ (\vec{\nabla}\phi)^i &= \partial_i \phi \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi)^i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_k \partial_j \phi \end{aligned} \right.$$

\* Símbolo de Levi-Civita

$$i, j, k = \{1, 2, 3\} (x, y, z)$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ trocas pares} \\ -1, \text{ trocas ímpares} \\ 0, \text{ repetição} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi - \frac{1}{2} \epsilon_{ikj} \partial_k \partial_j \phi \\ &\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = 0 \quad (\text{Sempre}) \end{aligned}$$

É portanto matematicamente consistente escrever  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$   
NO CASO ELETROSTÁTICO. Para o campo magnético isso não ocorre, pela lei de Ampére  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$  nem sempre é nulo, assim não há potencial escalar  $\phi$  que o descreva. Por outro lado sabemos que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , já que não há cargas (monopólos) magnéticos na natureza.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \text{ Sempre} \quad (\text{Sem choro nem vela, é não é culpa minha})$$

Podemos contudo, escrever o campo  $\vec{B}$  como o rotacional de outro vetor, chamado de potencial vetor  $\vec{A}$  da forma  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , isso é possível pois o divergente de todo rotacional é nulo veja:

$$(\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}))^i = \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j A^k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A^k + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_i A^k$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A^k - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A^k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A^k - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_i A^k =$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A^k - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A^k = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \text{ Sempre, Sem choro nem vela é a culpa de novo não é minha.}$$

Assim tanto o campo elétrico  $\vec{E}(x,y,z)$  e magnético  $\vec{B}(x,y,z)$  pg 124 podem ser descontados por potenciais  $\phi$  e  $\vec{A}$ , da forma:

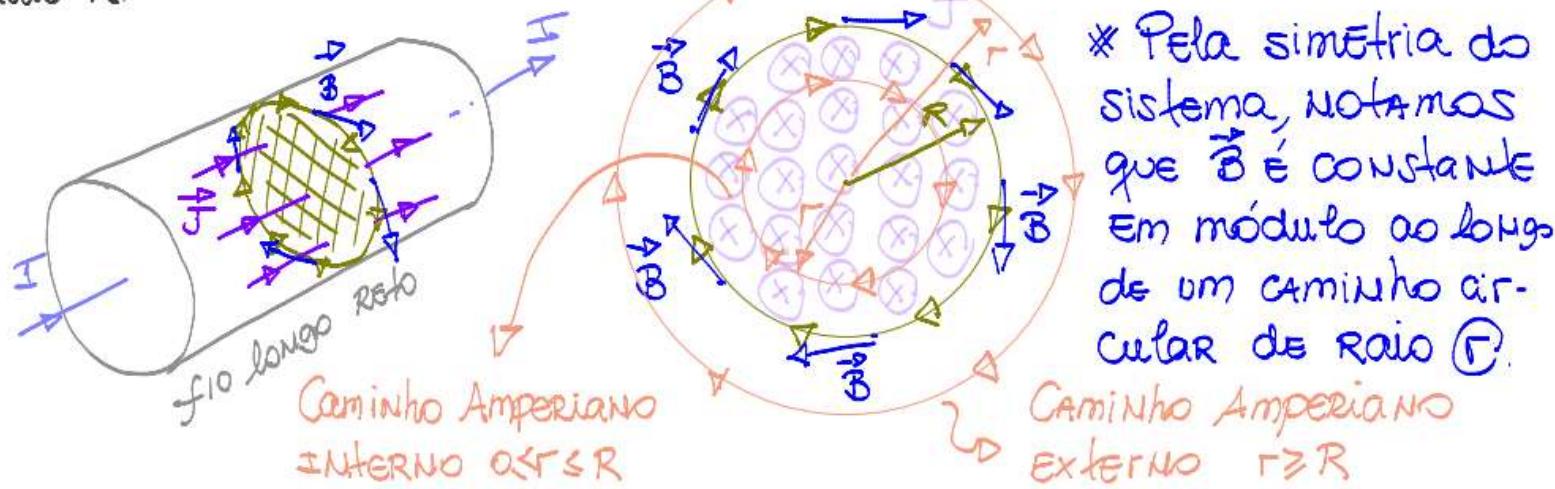
$$\vec{E}(x,y,z) = -\vec{\nabla}\phi(x,y,z)$$

$$\vec{B}(x,y,z) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(x,y,z)$$

\* Lembrando que essas expressões só valem p/ o estado estacionário.

→ Você pode estar se perguntando se esse trabalho todo para descrever  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  em função de  $\phi$ ,  $\vec{A}$  vale a pena. A resposta é um claro sim!, lembre-se da liberdade ao escolher o referencial do potencial (transformações de calibre). A importância é ainda mais clara quando analisamos as equações de Maxwell na luz da relatividade restrita. (Assunto que é tratado em Teoria Electromagnética II - 7ª fase do curso).

\* Exemplo: Da mesma forma que a lei de Gauss, podemos utilizar a lei de Ampère para calcular o campo magnético criado por distribuições de corrente  $\vec{J}$ , se houver simetria suficiente para facilitar nossa vida. Vamos calcular o campo em todo espaço criado por uma densidade uniforme de corrente  $\vec{J}$  que flui num fio de raio  $R$ .



Assim usando a lei de Ampère temos  
Campo INTERNO ao fio  $0 < r < R$

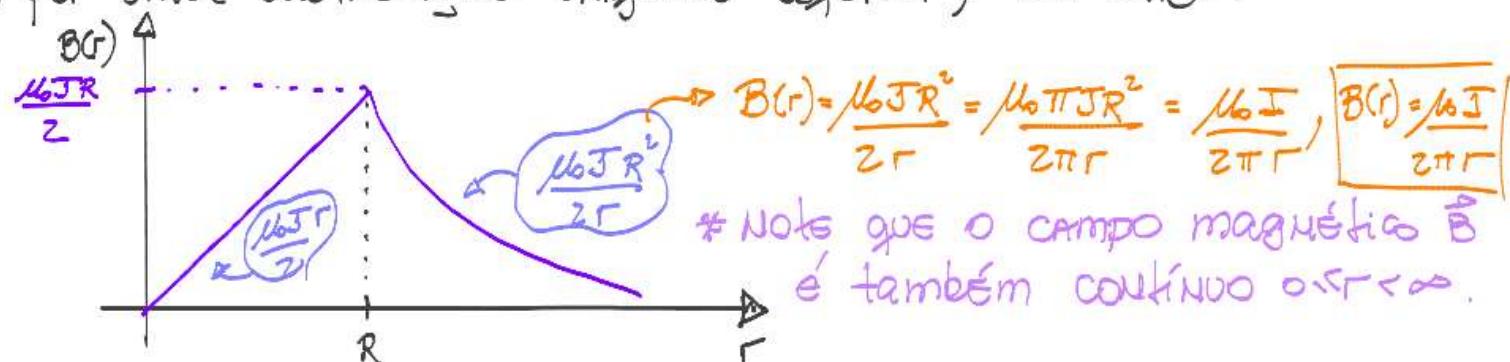
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{a} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 J \pi r^2, \quad B(r) = \frac{\mu_0 J r}{2}, \quad \boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J r}{2} \hat{\phi}}$$

Campo EXTERNO ao fio  $r \geq R$

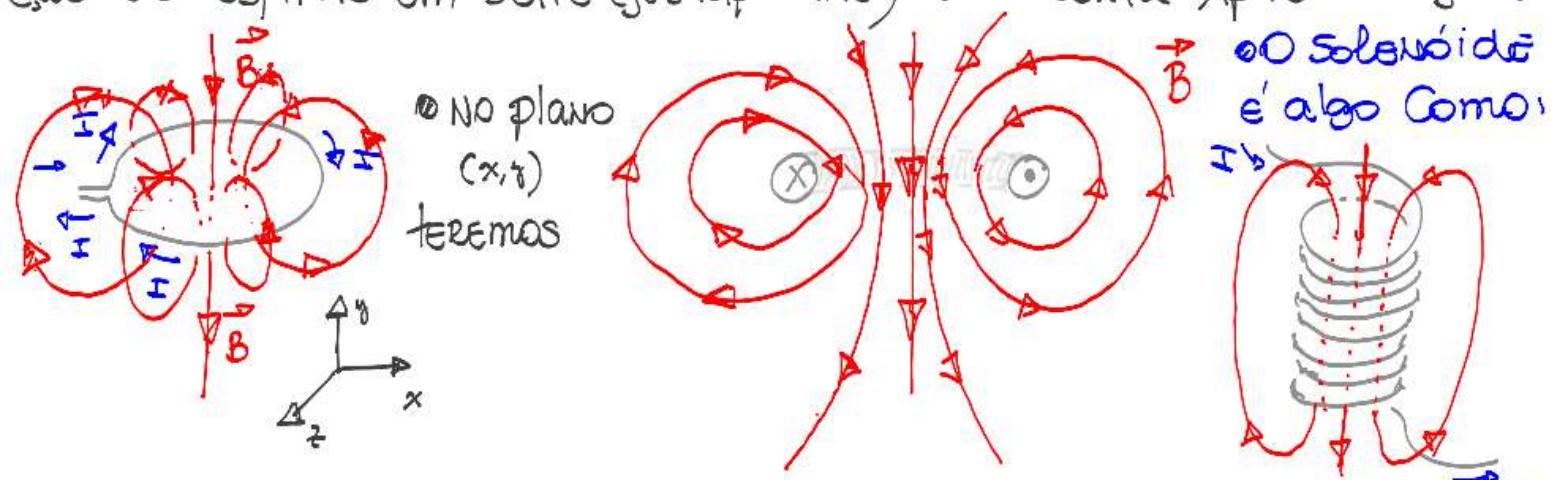
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{a} = B \cdot 2\pi R = \mu_0 J \pi R^2, \quad B(r) = \frac{\mu_0 J \pi R^2}{2\pi r}, \quad \boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J R^2}{2r} \hat{\phi}}$$

$$I = JA = J\pi R^2$$

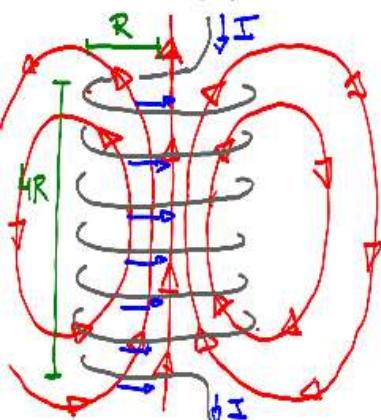
Note que o resultado para a parte externa FZR já havia pg 125 mos obtido pela Lei de Biot-Savart com fio infinito, degoste também AS SEMELHANÇAS (dependência  $c/r$ ) com o campo elétrico  $E(r)$  criado por uma distribuição uniforme esférica  $\rho$  de carga.



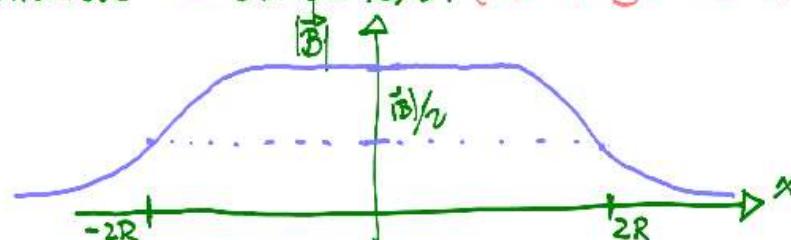
\* Exemplo: Calculamos utilizando a Lei de Biot-Savart qual o campo magnético  $B$  ao longo do eixo de uma espira circular de raio  $R$ , mas o campo fora do eixo não possui solução analítica trivial. Vamos encontrar abaixo o campo criado por uma coleção de espiras em série (juxtapostas) com certa aproximação.



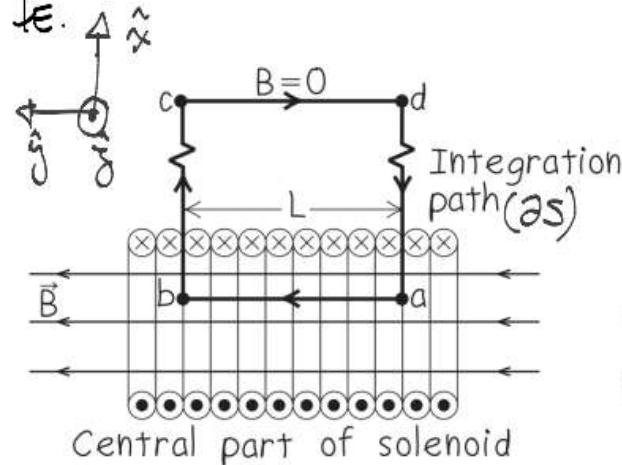
O campo  $B(x, y, z)$  criado por um solenóide é então a solução da integral de Biot-Savart para todo comprimento fio. Sabemos contudo que esse campo é bastante homogêneo no interior do solenóide, mesmo para os não tão longos, e sua intensidade cai para metade (ao redor de) nas extremidades do elemento. Assim, para um solenóide longo, é razoável aproximar esse campo como uniforme e calcular sua intensidade pela Lei de Ampére.



\* Tipicamente um solenóide que possui um comprimento 4 vezes maior que seu raio possui em suas extremidades um campo  $B/2$ . (ao longo do eixo)



Há em princípio um ângulo de cada volta da espira ao ser "ENRO- pg 126  
lada como um solenoide, mas vamos tratar o assunto separadamente.



\* Vamos assumir que o campo  $\vec{B}$  é uniforme no interior e zero fora dele, depois discutiremos as implicações dessas aproximações.  
⇒ Uma escolha "esperta" para o "loop" ou caminho de integração Amperiano pode nos fornecer uma simples relação para  $B$ .

Na figura a corrente elétrica sai da página no corte transversal do solenoide na parte inferior e entra no plano da página cruzando a área formada pelo contorno as na parte superior, aplicando a lei de Ampère para o caminho escolhido e considerando que o solenoide possui  $n$  voltas por unidade de comprimento temos:

$$\oint_{\text{as}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int}} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 n I = \mu_0 n L I$$

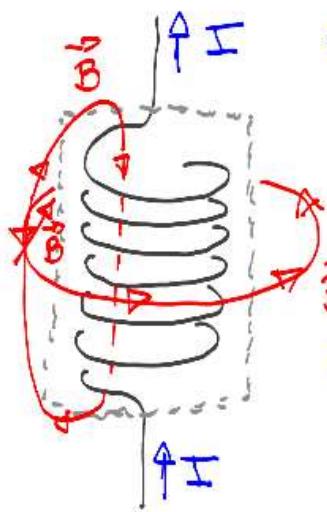
$a$   $b$   $c$   $d$

$$\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b B dl = B \int_a^b dl = BL = \mu_0 n L I \iff B = \mu_0 n I$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 n I \hat{j}}$$

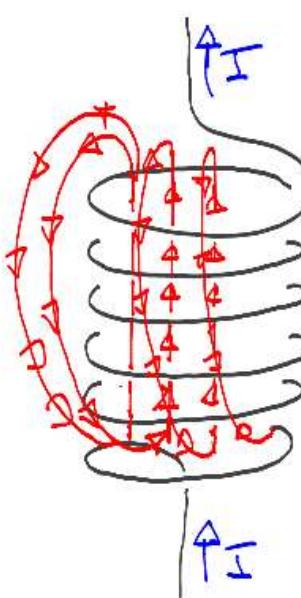
\* Segundo a regra da mão direita

Num solenoide real algumas linhas de campo  $\vec{B}$  "vazam" pelo solenoide, as linhas de campo  $\vec{B}$  possuem uma geometria ligeiramente distorcida, já que há um outro campo  $\vec{B}$  criado pela corrente que cruza o eixo do solenoide.



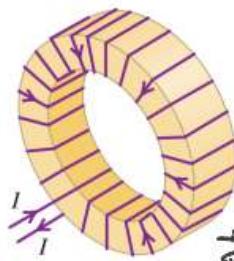
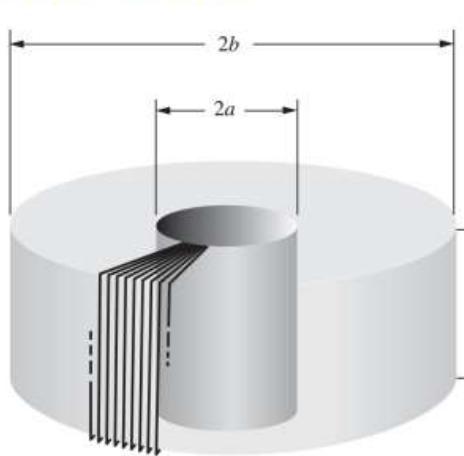
\* Essa combinação de fatores faz com que a descrição precisa do campo criado não seja tão simples. (Biot-Savart)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{x} \times \hat{r}}{r^2}$$



\* Uma tarefa interessante é seguir uma das linhas de campo  $\vec{B}$  do interior para o exterior de volta ao interior e verificar se as linhas são realmente fechadas!

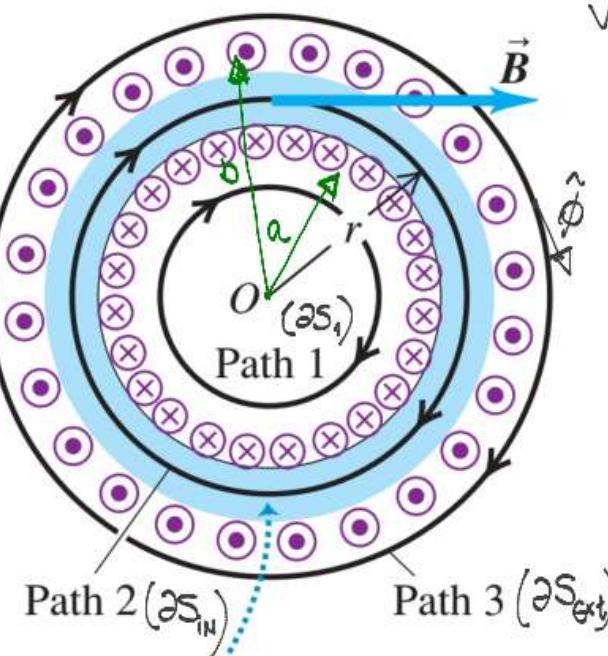
**Exemplo:** Vamos calcular o campo magnético  $\vec{B}$  criado pg 127 por uma bobina toroidal de seção retangular, onde os fios são enrolados com grandes densidades lineares  $\eta$ . Dados  $\eta = \text{número de voltas } N \text{ em torno do corpo de raio interno } a \text{ e raio externo } b$ . Quanto vale  $\vec{B}$  em todo espaço exterior, para  $r \geq b$ .



Utilizando a regra da mão direita e as simetrias envolvidas, podemos afirmar que o campo magnético  $\vec{B}$  possui simetria radial e direção sempre tangente  $\hat{\phi}$  ao eixo toroidal.

O campo portanto pode depender da distância radial  $r$ , mas pela simetria é constante em intensidade para  $r = \text{cte}$ .

Vamos começar pelo campo exterior ao toróide



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \text{ para } r > b$$

$$\oint_{2S_{ext}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} = \mu_0 (NI - NI) = 0$$

$$\oint (\vec{B}_{int} + \vec{B}_{ext}) \cdot d\vec{l} = 0, \quad \vec{B}_{int} = -\vec{B}_{ext}, \quad \boxed{\vec{B} = \vec{0}}$$

Ou seja, o campo magnético é nulo fora do toróide (confinamento do campo  $\vec{B}$ )

No interior ( $r < a$ ),  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} = 0$  (não há corrente que cruza a área com limite de borda  $2S_1$ )

Portanto:

$$\oint_{2S_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{2S_1} B \cdot d\vec{l} = B \int_{2S_1} d\vec{l} = 0, \quad B = 0, \quad \vec{B}(r) = 0, \quad r < a$$

simetria

Na região interna ao toróide ( $a < r < b$ ) o campo  $\vec{B}$  é muito mais interessante, veja:

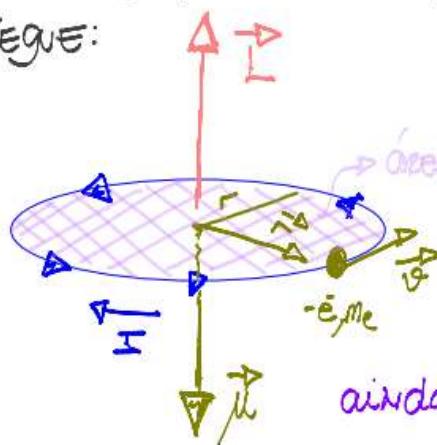
$$\oint_{2S_{int}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} = \mu_0 NI = \oint_{2S_{int}} B \cdot d\vec{l} = B \int_{2S_{int}} d\vec{l} = B 2\pi r \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \hat{\phi}}$$

## 5.10 → Materiais paramagnéticos, diamagnéticos e ferromagnéticos pg 128

A maneira com a qual os materiais respondem à presença (inversão) num campo magnético externo  $\vec{B}_0$  pode ser resumido em três tipos em geral, descartando fenômenos anômalos. Para isso precisamos entender a corrente elétrica microscópica existente no interior dos átomos.

Num modelo atômico simples, ingênuo, errado porém esclarecedor é a órbita clássica do elétron ao redor do núcleo, como segue:



\* Existe uma corrente  $I$  associada ao movimento orbital do elétron de carga  $-e$ , quando campo  $\vec{B}$  e momento do dipolo magnético  $\vec{\mu}$  onde  $\vec{\mu} = I \vec{A}$ .

\* A corrente é aproximadamente  $I = \Delta \phi / \Delta t$ , ou ainda  $I = \frac{e}{T}$ ,  $T$  = período da órbita

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Assim:  $I = \frac{e v}{2\pi r}$ ,  $v$  o momento do dipolo vole  $\mu = I \cdot A = \frac{e v}{2\pi r} \pi r^2$

$$\mu = \frac{e v r}{2}$$

Associado ao movimento circular do elétron há um momento angular  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m_e \vec{r} \times \vec{v}$ ,  $L = m_e r v$ , agora vem a parte interessante no átomo o elétron não possui valores contínuos de  $L$ , na mecânica quântica os valores do momento angular orbital são quantizados (discretos) e o experimento mostra que são em valores inteiros de um valor fundamental o  $\hbar$  ( $h/\pi$ ), conhecido como constante de Planck.

$$(h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J.s})$$

$$\hbar = h/\pi = (1,05457168(8) \times 10^{-34} \text{ J.s})$$

Ou seja  $L = n\hbar$ , onde  $n = 1, 2, 3, \dots$  (Inteiro)

$$m_e r v = n\hbar, \text{ então temos } \mu = \frac{e v r}{2} = \frac{e m_e r v}{2 m_e} = \frac{e n \hbar}{2 m_e}$$

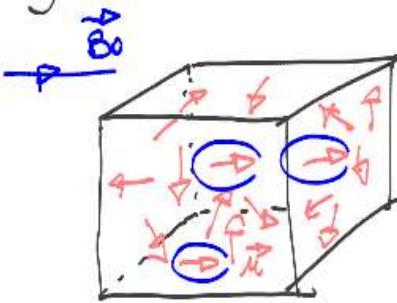
então:  $\mu_n = n \frac{e \hbar}{2 m_e}$ , o menor valor possível de  $\mu \rightarrow \mu_1 = \mu_B$

$\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_e} \approx 9,27 \times 10^{-24} \text{ A.m}^2 \left( \frac{J}{T} \right)$ , Conhecido como magneton de Bohr, é a menor unidade de momento de dipolo mag.

Existe uma outra fonte de dipolo magnético  $\vec{\mu}$  e está pg 129 associado ao próprio elétron, este é uma propriedade, uma característica da partícula nós a chamamos de "SPIN" e possui magnitude muito próxima a  $\vec{\mu}_s$ .

## 5.10.1 → Materiais paramagnéticos

Comumente materiais que não são fortemente atraídos por ímãs ou na presença de campos magnéticos moderados são para magnéticos. Nesses materiais a soma entre os momentos magnéticos orbitais e de spin é diferente de zero,  $\vec{\mu} \neq \vec{0}$  mas estão aleatoriamente distribuídos, de forma que o momento total  $\vec{\mu}_T = \vec{0}$ . Na presença de um campo magnético externo alguns desses dipólos podem se alinhar na direção de  $\vec{B}_0$ , aumentando o campo magnético no interior do material.



O fenômeno de polarização magnética do material chamamos de magnetização, e sua intensidade é dada por  $\vec{M}$  onde:

$$\vec{M} = \frac{\vec{\mu}_{\text{Total}}}{V} \Rightarrow \text{densidade volumétrica de momento de dipolo magnético.}$$

O campo magnético no interior do material vale:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

Neste caso o campo magnético interno é aumentado por um fator  $\kappa_m$ , chamado de permeabilidade magnética relativa do material.

Na prática o material (meio de constante  $\kappa_m$ ) altera a permeabilidade magnética do meio  $\mu_0$  (vácuo) para  $\kappa_m \mu_0 = \mu$ , temos:

$$\mu = \kappa_m \mu_0 \quad , \text{ ou seja, } \frac{d\vec{B}}{4\pi} = \frac{\mu I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I_{\text{int}}, \text{ em meios magnéticos}$$

A diferença relativa entre material e vácuo é descrita pela susceptibilidade magnética  $\chi_m$ , definida como:

$\chi_m = \kappa_m - 1$ , materiais paramagnéticos possuem baixa susceptibilidade exemplo: Alumínio =  $2.2 \times 10^{-5}$ , Sódio =  $0.2 \times 10^{-5}$ , oxigênio =  $0.19 \times 10^{-5}$ , etc. E dependem fortemente da temperatura (competição no alinhamento dipolar).

## 5.10.2 → Diamagnetismo

Há materiais que possuem momento de dipolo magnético nulo, ou seja, não há dipolos para serem alinhados pelo campo externo  $\vec{B}_0$ . Mas mesmo nesse caso há uma resposta magnética do material resultado da indução de dipolos no material, através de um processo que gera um campo induzido contrário a  $\vec{B}_0$ , de forma que o campo resultante é ligeiramente menor  $\vec{B}_1 < \vec{B}_0$ . Viremos esse processo de indução no próximo capítulo, associado à última de nossas equações de Maxwell a lei de indução de Faraday. Esses materiais diamagnéticos possuem  $\chi_m < 0$  (negativa).

Exemplo: Bismuto  $\chi_m = -16,6 \times 10^{-5}$   
 MERCURIO  $\chi_m = -2,9 \times 10^{-5}$   
 Prata  $\chi_m = -2,6 \times 10^{-5}$   
 Cobre  $\chi_m = -1,0 \times 10^{-5}$

## 5.10.3 → Ferromagnetismo

Por outro lado, há materiais em que os momentos de dipolo magnético interagem intensamente, resultando na formação de domínios magnéticos permanentes, com regiões de magnetização  $\vec{m}_i$ . Essas regiões em geral acabam se anulando c/  $\vec{m} = \vec{0}$ . Mas na presença de campo externo  $\vec{B}_0$  os domínios que apontam na direção do campo  $\vec{B}_0$  aumentam, enquanto os outros diminuem, resultando numa forte magnetização final, que permanece presente mesmo após a retirada do campo externo.

