

Física IV - Equações de Maxwell

LISTA 6: Equações de Maxwell e ondas EM

Código: FSC 5194

Professor: Massayuki Kondo, sala 102, Dept. Física, UFSC

Homepage: www.atomobrasil.com

Problema 1

Um fio semi-infinito transporta uma corrente I que flui de $-\infty$ para o ponto indicado na figura abaixo, neste ponto a carga q varia temporalmente ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = I$). Considere o círculo indicado na figura abaixo, que possui raio b e cobre um ângulo 2θ com relação a carga q . Calcule a integral $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ no caminho descrito pela borda do círculo de três maneiras diferentes:

a)- Encontre o campo magnético \mathbf{B} sobre o círculo utilizando a lei de Biot-Savart somando as contribuições de cada fonte de campo ao longo do fio.

b)- Utilize a forma completa da equação de Maxwell, que representa a forma generalizada da lei de Ampere incluindo o termo de corrente de deslocamento.

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (1)$$

Onde S é a superfícies arbitrária limitada pelo círculo de raio b , e que não intercepta o fio.

c)- Utilize a mesma estratégia que b) mas agora faça com que a superfície S intercepte o fio.

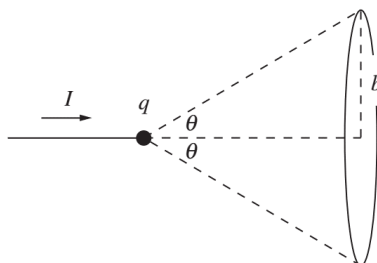


Figura 1: Fio semi-infinito com corrente I .

Problema 2

Um solenoide de raio R com n densidade de voltas por unidade de comprimento. A corrente que atravessa o solenóide varia com o tempo de forma senoidal como $I(t) = I_0 \cos \omega t$. O campo magnético no solenóide é dado por $B_0(t) = \mu_0 n I(t)$, portanto, varia também com o tempo. Assim calcule:

a)- Um campo magnético variável causa um campo elétrico \mathbf{E} , encontre o valor do campo elétrico numa posição r a partir do eixo central do solenóide.

b)- Um campo elétrico variável causa um campo magnético \mathbf{B} . Calcule o valor de \mathbf{B} numa distância r a partir do eixo central do solenóide. Calcule a diferença entre o campo $B(r, t)$ que você acabou de achar e o campo magnético no eixo central do solenóide $\Delta \mathbf{B}(r, t)$.

c)- Calcule o campo magnético total no interior do solenóide. Calcule a razão entre $\Delta \mathbf{B}(r, t)/B_0(t)$. Compare o tempo de variação da corrente o tempo que a luz demora para cruzar o solenóide, de forma que para ω cotidianos o valor do campo total pode ser dado na forma de $\mathbf{B}_0(t)$.

29 **Problema 3**

30 Considere duas ondas viajando em direções opostas, cujos componentes do campo elétrico são dados por:

31 $\mathbf{E}_1 = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x}$ and $\mathbf{E}_2 = E_0 \cos(kz + \omega t)\hat{x}$:

- 32 a)- Calcule a onda estacionária associada a componente elétrica da onda EM.
33 b)- Calcule a onda estacionária do campo magnético a partir das componentes do campo elétrico acima somando-as.
34
35 c)- Utilize as equações de Maxwell para calcular a componente do campo magnético estacionário asso-
36 ciada a onda estacionária do campo elétrico encontrado na parte a).

37 **Problema 4**

38 A densidade de potencia da luz solar é aproximadamente $1 \text{ kW}/\text{m}^2$. Qual o valor rms da componente
39 magnética associada?

40 **Problema 5**

- 41 a)- Considere o campo eletromagnético formando uma onda estacionária como no problema 3, calcule a
42 densidade de energia para essa onda $\mathcal{U}(z, t)$. Faça um gráfico dessa onda para valores de ωt dados por
43 $\{0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi\}$.
44 b)- Faça um gráfico da componente z do vetor de Poynting $S_z(z, t)$, para valores de ωt em $\pi/4, \pi/2$ e $3\pi/4$
45 o que esse gráfico representa?

46 **Problema 6**

47 Uma corrente I flui por um fio em direção a uma carga pontual $Q(t)$, resultando na variação da carga com
48 o tempo. Considere uma superfície esférica S centrada na carga, com um buraco muito pequeno onde o fio
49 atravessa a superfície, como mostrado na figura abaixo. A circunferência C do buraco, marca a fronteira da
50 superfície S . Verifique que a forma integral da equação de Ampère-Maxwell é satisfeita.

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}) \cdot d\mathbf{a} \quad (2)$$

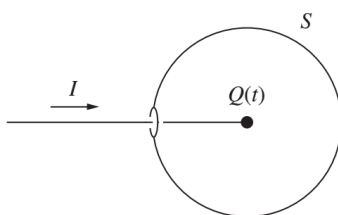


Figura 2: Fluxo de corrente por um fio, alterando o valor da carga interna a superfície S

51 **Problema 7**

52 Calcule o campo magnético no espaço livre, associado a componente elétrica da onda dada por $\mathbf{E} = E_0(\hat{x} +$
53 $\hat{y}) \sin [2\pi/\lambda(z + ct)]$ com $E_0 = 20 \text{ V}/\text{m}$.

54 **Problema 9**

55 Faça uma analogia com a energia de uma partícula clássica que se move com certa velocidade v , com a
56 densidade de momento por unidade de volume transportado pela partícula. Realize uma análise dimen-
57 sional, e mostre que a densidade de momento associado ao campo eletromagnético pode ser dado por $\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0 c^2}$.
58 De forma que essa quantidade quando integrada num certo volume resulta no momento transportado pelo
59 campo numa certa região do espaço.

60 **Problema 10**

61 Calcular o campo magnético \mathbf{B} entre as placas de um capacitor, pode ser realizado de maneira tediosa se
62 integrado pela relação de Biot-Savart de todos os elementos de corrente de condução ao longo dos fios.
63 Utilizando a forma modificada da equação de Ampère-Maxwell essa expressão é simplificada. A figura
64 abaixo mostra um capacitor de placas circulares, considere o raio do capacitor muito maior que a separação
65 s entre as placas. Um ponto P na posição central entre elas está a uma distância de r do eixo de simetria
66 do sistema. Mostre que o campo magnético neste ponto tem magnitude $B = \mu_0 I r / 2\pi b^2$. Qual o valor do
67 campo magnético logo após o capacitor ser completamente carregado, discuta?

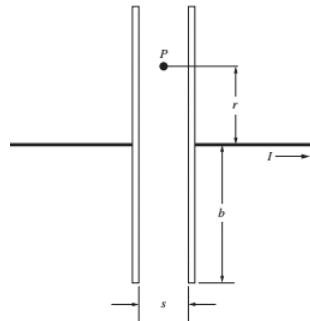


Figura 3: Campo magnético criado no interior do capacitor quando do seu carregamento, ou descarregamento

68 **Problema 11**

69 Mostre que o campo eletromagnético descrito por:

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{z} \cos kx \cos kz \cos \omega t, \quad \mathbf{B} = B_0 (\hat{x} \cos kx \sin ky - \hat{y} \sin kx \cos ky) \sin \omega t \quad (3)$$

70 satisfaz as equações de Maxwell no espaço livre se $E_0 = \sqrt{2}cB_0$ e que $\omega = \sqrt{2}ck$. Este campo pode
71 existir numa caixa de metal ao longo da região $-\pi/2k < x, \pi/2k$ e $-\pi/2k < y, \pi/2k$ para qualquer valor
72 de z . Faça um desenho mostrando como essa onda pode ser representada em 3 dimensões e comente sobre
73 o resultado.

74 **Problema 12**

75 Mostre que a quantidade $E^2 - c^2 B^2$ é invariante segundo as transformações de Lorentz. Essa quantidade é
76 importante e marca o produto interno/escalar de um tensor, o tensor eletromagnético $\mathcal{F}_{\mu\nu}$.

77 _____
78 **Observação:** Com base nos conceitos discutidos em aula, aconselho que escolham mais alguns problemas
79 dos livros citados nas referências bibliográficas.

80 **Referências**

81 **bibliografia:** 1) Halliday/Resnick/Krane (Física IV) 10ª edição. 2) Tipler, Volume 2, Eletricidade e
82 Magnetismo e óptica, Terceira edição. 3) MOYSES NUSSENZVEIG Física (IV), 4) JAMES HARTLE
83 (Relatividade Geral) 5) BERNARD SCHUTZ (A first course in General Relativity) 2ª edição.