Lembre-se que consideramos aqui o boost na direção x onde $\vec{V} = V_x \hat{x} = V\hat{x}$ (por simplicidade), $\beta = V/c$

⇨ O referencial (S') então medirá a velocidade de P em seu referencial como: $\vec{v}' = v'_x \hat{x} + v'_y \hat{y} + v'_z \hat{k}$, então

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(-\beta c\,dt + dx)}{\gamma(dt - \frac{\beta}{c}dx)} = \frac{-\beta c + \frac{dx}{dt}}{1 - \frac{\beta}{c}\frac{dx}{dt}} = \frac{-\beta c + v_x}{1 - \frac{\beta}{c}v_x} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}$$

$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}}$$

↦ Velocidade de P na direção x quando medido a partir do referencial (S') //

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{\beta}{c}dx)} = \frac{dy/dt}{\gamma(1 - \frac{\beta}{c}\frac{dx}{dt})} = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{V}{c^2}v_x)}$$

$$\boxed{v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{V}{c^2}v_x)}}$$

↦ Velocidade de P na direção y quando medido a partir do referencial (S')

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - \frac{\beta}{c}dx)} = \frac{dz/dt}{\gamma(1 - \frac{\beta}{c}\frac{dx}{dt})} = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{V}{c^2}v_x)}$$

$$\boxed{v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{V}{c^2}v_x)}}$$

↦ Velocidade de P na direção z quando medido a partir do referencial (S')

Do ponto de vista de (S') o referencial (S) se move com velocidade V para a esquerda, portanto a transformação inversa se dará quando $V \mapsto -V$, ficamos então com:

$$\boxed{v_x = \frac{v'_x + V}{(1 + \frac{V}{c^2}v'_x)}}, \quad \boxed{v_y = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}v'_x\right)}}, \quad \boxed{v_z = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}v'_x\right)}}$$

Essas expressões mostram como velocidades "relativísticas" se compõem entre referenciais inerciais.

Note também que essa composição é válida para altas velocidades relativas, se V é pequeno, $\beta \to 0$ e as expressões anteriores se reduzem às transformações clássicas de Galileu.

$$x' = \gamma(-\beta ct + x)$$
$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

$\Longrightarrow$ Para baixas velocidades relativas entre observadores $\beta \to 0$, $\gamma \to 1$ $\Rightarrow$

$$x' = x - vt$$
$$t' = t$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

(transformações Galileanas)

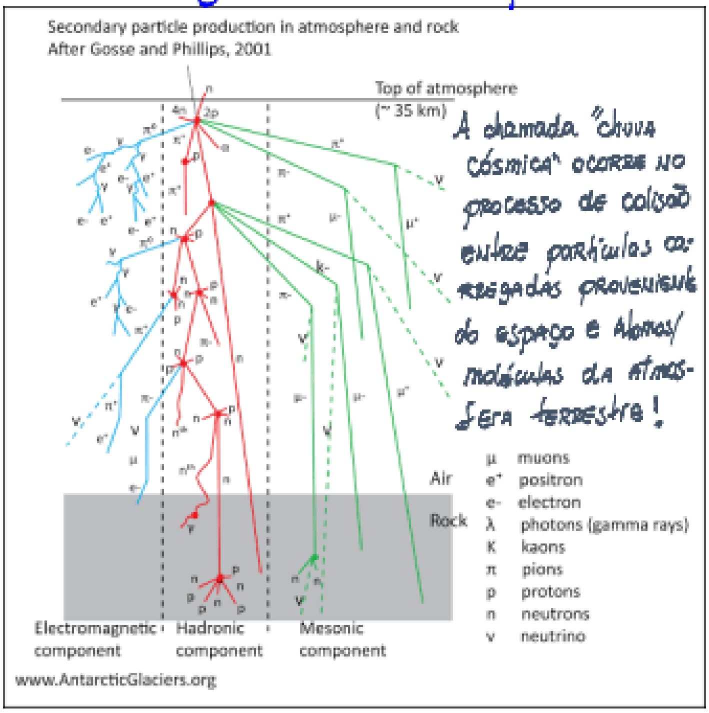
O mesmo com as velocidades relativas

$$v'_x = \frac{v_x - V}{\left(1 - \frac{\beta}{c} v_x\right)}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c} v_x\right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c} v_x\right)} \Rightarrow v'_x = v_x - V, \; v'_y = v_y, \; v'_z = v_z$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

Soma clássica de velocidades

* Exemplo 1 $\mapsto$ Vamos discutir um fenômeno apenas compreendido graças à teoria da relatividade restrita, a detecção de múons na superfície da terra. Essas partículas são criadas da colisão entre partículas altamente energéticas (raios solares) prótons de alta velocidade (Sol) e átomos da nossa atmosfera. Os múons logo decaem espontaneamente num tempo de $\approx 2{,}2\,\mu s$ e não deveriam chegar à superfície da terra, mas chegam! Expliquemos:



A chamada "chuva cósmica" ocorre no processo de colisão entre partículas carregadas provenientes do espaço e átomos/moléculas da atmosfera terrestre!

$\Rightarrow$ Em experimentos terrestres com fontes radioativas estacionárias, temos

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$
$$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

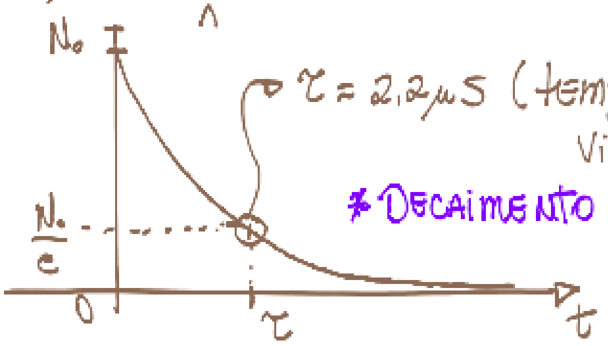
e^- (elétron), e^+ (pósitron)

$\bar{\nu}_e$ (antineutrino do elétron)

ν_e (neutrino do elétron)

ν_μ (neutrino do múon)

$\bar{\nu}_\mu$ (anti neutrino do múon)



* Decaimento exponencial

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Na terra o tempo de vida é de $2{,}2\,\mu s$.

Os raios cósmicos atingem a terra com velocidades relativísticas $v \approx 0{,}995c$, veja que um múon criado na alta atmosféra (10 Km de Altitude) não atingiria o solo. Veja.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \Delta x = v\Delta t = 0{,}995 \times c \times 2{,}2\mu s \approx 656{,}7\,m, \quad \boxed{c = 3\times10^{8}\,m.s^{-1}}$$

↳ Assim, após viajar ~660 metros muito pouco múon estaria intacto.

Agora aplicamos a elegancia da relatividade. Para o múon de fato se passaram 2,2μs (seu tempo próprio Δt') que não é o mesmo em nosso referencial. Aqui o tempo vale Δt. onde:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}995^2}}\Delta t' \approx 10\,\Delta t' = 22\mu S$$

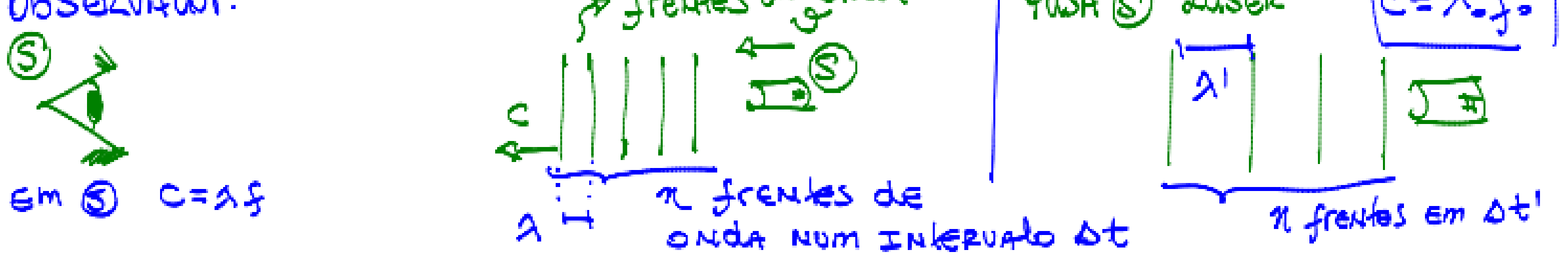
↳ Para nós na terra esses múons relativísticos vivem 10 vezes mais percorrento portanto um espaço 10 vezes maior. Assim múons podem ser detectados na superfície, já que agora uma boa parte deles sobrevive e chega a percorrer por volta de 6,6 Km!

* Mas a relatividade não dá ponto sem nó (não há choro nem vela), do ponto de vista do múon é a terra que vai em sua direção c/ velocidade 0,995c. No referencial do múon os 6,6Km se contraem e para ele a terra viajou 660 metros antes dele morrer.

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = \frac{6.6\times10^{3}\,m}{10} = 660 \text{ metros}$$ (Contração Espacial Fitz Gerald-Lorentz)

8.9 ↳ O efeito Doppler relativístico

Já sabemos que frequências de sons se alteram devido ao movimento relativo entre fonte e observador na mecanica clássica (o chamado Efeito Doppler). Agora imagine uma fonte de luz (laser, lâmpada, etc) e essa fonte se move com velocidade v c/ relação à um observador.



O número de frentes de onda é o mesmo em ambos os referenciais, assim temos:

em (S) $\quad \eta = \frac{c\Delta t - v\Delta t}{\lambda} = \frac{(c-v)\Delta t}{\lambda}$, $c = \lambda f \leftrightarrow \lambda = \frac{c}{f}$, $\boxed{\eta = f\left(1-\frac{v}{c}\right)\Delta t}$

em (S') $\quad \boxed{\eta = f_0 \Delta t'}$

então: $f(1-\beta)\Delta t = f_0 \Delta t' \leftrightarrow f = \frac{f_0}{(1-\beta)}\frac{\Delta t'}{\Delta t}$, como $\Delta t = \gamma \Delta t'$, $\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \gamma$

ficamos com:

$$f = \frac{1}{\gamma(1-\beta)} f_0 = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} f_0 = \sqrt{\frac{\cancel{(1-\beta)}(1+\beta)}{(1-\beta)^{\cancel{2}}}}\, f_0 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, f_0$$

Assim:

$$f = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, f_0 \quad \text{ou} \quad \lambda = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, \lambda_0$$

, onde fonte e observador se aproximam.

ou ainda

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, f_0 \quad \text{ou} \quad \lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, \lambda_0$$

, onde fonte e observador se separam.

Omitirei neste nível a discussão sob o efeito Doppler num boost em qualquer direção, quando há boosts em outras direções as expressões acima não são mais válidas. Mas para isso precisaríamos compreender melhor a matemática e manipulação tensorial.

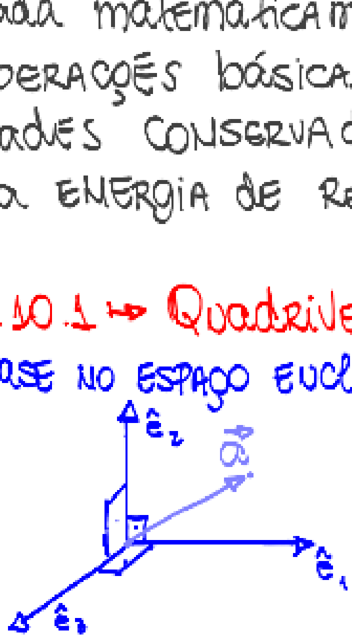
8.10 ↔ Cinemática Relativística (Energia e Quadrivetores)

Faremos aqui uma discussão introdutória um pouco mais avançada matemáticamente de quadrivetores a^μ e algumas definições e operações básicas. Com isso aplicaremos à descrição das quantidades conservadas entre referenciais e finalmente a descrição da energia de repouso e energia relativística.

8.10.1 ↔ Quadrivetores (a^μ) e Tensor métrico ($\eta_{\mu\nu}$)

Soma de Einstein

Base no espaço euclidiano



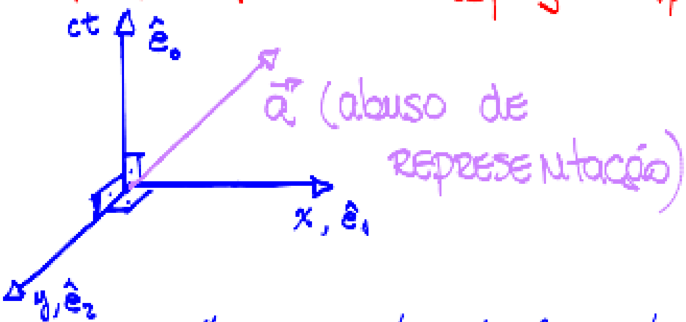
Vetores: - módulo, - direção, - sentido

$\vec{a} = a^1\hat{e}_1 + a^2\hat{e}_2 + a^3\hat{e}_3 = a^i\hat{e}_i$

$\vec{a} = (a^1, a^2, a^3)_{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}}$

base ortonormal $\hat{e}_1\cdot\hat{e}_1 = \hat{e}_2\cdot\hat{e}_2 = \hat{e}_3\cdot\hat{e}_3 = 1$

⇒ Quadrivetores no espaçotempo de Minkowski (3+1)



$\vec{a} \equiv a^0\hat{e}_0 + a^1\hat{e}_1 + a^2\hat{e}_2 + a^3\hat{e}_3$

$\vec{a} \equiv (a^0, a^1, a^2, a^3)$; $\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$

$\vec{a} \equiv (a^0, a^i)$, $i = 1,2,3$ (letra latina)

$\vec{a} \equiv a^\mu$, $\mu = 0,1,2,3$ (letra grega)

a^μ reprenta dualmente o quadrivetor e suas componentes

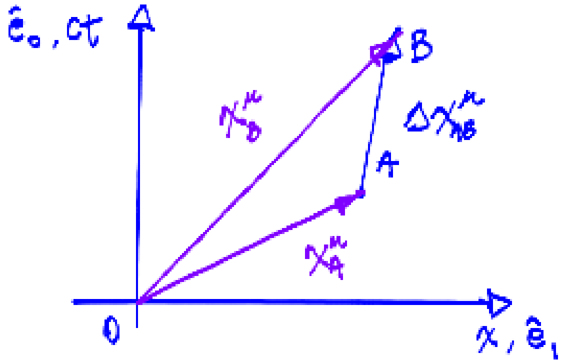
nosso caso $\mu = 0 \mapsto$ componente temporal

$\mu = 1,2,3 \mapsto$ as componentes espaciais

onde:

$$a^\mu \equiv (a^t, a^x, a^y, a^z)$$, espaço cartesiano.

⇒ Quadrivetor deslocamento no espaçotempo Δx^μ é o intervalo entre dois eventos x^μ (evento é um quadrivetor posição 4-D)



$x_A^\mu \equiv (x_A^0, x_A^1, x_A^2, x_A^3)$

$x_B^\mu \equiv (x_B^0, x_B^1, x_B^2, x_B^3)$

$\Delta x^\mu_{AB} = x_B^\mu - x_A^\mu$

↳ Quatro equações na mesma representação

Nosso evento (ponto no espaçotempo) tem posição $x^\mu \equiv (ct, x, y, z)$ onde $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$.

* Essa representação do quadrivetor com índice em cima x^μ é chamada de forma "contra-variante" e é justificado pois as coordenadas se transformam de maneira inversa/contrária aos vetores da base $\hat{e}_\mu$ entre referenciais inerciais.

8.10.2 ↦ Produto interno (escalar) entre quadrivetores

Uma operação matemática entre vetores/quadrivetores é fundamental o produto escalar, essa operação pode nos fornecer o tamanho/módulo/intensidade do vetor ou o intervalo do quadrivetor no espaçotempo.

Produto escalar entre vetores $\vec{a}, \vec{b}$

↦ $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \vec{b}\cdot\vec{a}$

↦ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

↦ $\alpha\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, módulo do vetor $\vec{a}$

Quadrivetorialmente e abusando da representação temos:

$$\vec{a} \equiv \sum_{\mu=0}^{3} a^\mu \hat{e}_\mu \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_\mu a^\mu \hat{e}_\mu \cdot \sum_\nu b^\nu \hat{e}_\nu = \sum_\mu \sum_\nu a^\mu b^\nu \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu$$

$$\vec{b} \equiv \sum_{\mu=0}^{3} b^\mu \hat{e}_\mu$$

(Soma de Einstein) $\mapsto$ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a^\mu b^\nu \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu}$

$\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu \mapsto$ é o produto escalar entre vetores da base quadri-dimensional de Minkowski em um certo referencial.

Cada elemento $\hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta$ chamaremos $\eta_{\alpha\beta}$ a métrica do espaço tempo.

$$\eta_{\alpha\beta} = \hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta \longrightarrow \begin{pmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix}$$

$\mapsto$ Essa matriz fornece a métrica do espaçotempo

* Exemplo: O tamanho de um quadrivetor deslocamento Δx^μ:

$$\Delta\vec{x} \cdot \vec{x} = \Delta x^\mu \Delta x^\nu \eta_{\mu\nu} = \Delta x^\nu \Delta x^\mu \eta_{\nu\mu} = \Delta x^\mu \Delta x^\nu = \eta_{\nu\mu}$$

portanto:

$\boxed{\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}}$ // (igual a sua transposta)

$$\Delta\vec{x} \cdot \Delta\vec{x} = \Delta s^2 \text{ (resultado do produto escalar)}$$

onde

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$
$$\Delta x^\mu \equiv (\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3) = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

} Forma Contra-Variante dos quadrivetores

então

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

$\mapsto$ nossa definição de produto escalar discreto

ou infinitesimalmente:

$$\boxed{ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$\mapsto$ Quantidade invariante no espaço tempo entre observadores

* Note que para isso a métrica é fácil de descobrir!

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \end{aligned}\right\} \text{Se } \eta_{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mapsto$ Essa é a forma que governa a cinemática entre ref. inerciais

Algebricamente a operação da métrica $\eta_{\alpha\beta}$ num quadri-vetor resulta num "abaixamento de um índice" mudando a forma contra-variante para covariante e vice-versa. Veja:

$$\eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \rightarrow \left.\begin{array}{l} \eta_{00}dx^0 = -cdt = dx_0 \\ \eta_{11}dx^1 = dx = dx_1 \\ \eta_{22}dx^2 = dy = dx_2 \\ \eta_{33}dx^3 = dz = dx_3 \end{array}\right\}$$

$$dx_\mu \equiv (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3) \equiv (-cdt, dx, dy, dz)$$

então:

$$\boxed{\eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha = dx_\beta}$$

ou vice-versa:

$$\boxed{\eta^{\alpha\beta}\, dx_\alpha = dx^\beta}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^\mu \equiv (ct, x, y, z) \equiv (x^0, x^i) \equiv (x^0, \vec{x}) \\ x_\mu \equiv (-ct, x, y, z) \equiv (x_0, x_i) \equiv (x_0, \vec{x}) \end{array}\right\} \quad \boxed{x^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu}$$

→ Assim a própria métrica transforma entre uma forma e outra.

Simplificando ainda mais a notação: $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = x_\beta x^\beta$ //

Outro resultado Importantíssimo! A métrica é a mesma para todos os referenciais

$$\boxed{\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}} \; //$$

*Faça em casa: Mostre que o produto escalar entre dois quadrivetores a^μ e b^μ é invariante segundo as transformações de Lorentz. Use:

→ Definição de produto escalar $\eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$ no ref (S) e $\eta_{\mu\nu} a'^\mu b'^\nu$ no referencial (S')

→ E que a transformação entre os referenciais dos quadrivetores é dada pela matriz de transformação de Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$ onde:

$$\boxed{a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu} \quad \text{e} \quad \Lambda^\mu{}_\nu \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Para um boost na direção x

Resultado

$\eta'_{\mu\nu} a'^\mu b'^\nu = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$, onde $\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

$$\boxed{a'_\nu b'^\nu = a_\nu b^\nu} \; //$$